组合数学与图论

陈景林　阎满富　编著

中国铁道出版社

2001年·北京

（京）新登字 063 号

内 容 简 介

组合数学与图论是研究离散数学的学科，有其广泛的应用。本书主要阐述了组合数学与图论的基本内容和方法，其主要内容有：抽屉原理、排列与组合、容斥原理、递归关系、母函数、图的基本概念、树、平面图、匹配理论、路径问题以及各类应用问题等。

本书条理清楚，层次分明，深入浅出，针对性强。并重点阐述了应用的内容。每章均配备了习题，书后附有解答或提示。本书可作为中学数学教师继续教育和师范院校数学专业的教材。

图书在版编目(CIP)数据

组合数学与图论/陈景林，阎满富编著．－北京：中国铁道出版社，2001.4 重印

ISBN 7－113－03854－9

Ⅰ.组…　Ⅱ.①陈…　②阎…　Ⅲ.①组合数学　②图论　Ⅳ.O157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 42022 号

书　　名：组合数学与图论
作　　者：陈景林　阎满富
出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑：任军
印　　刷：遵化市胶印厂
开　　本：850×1168　1/32　印张：8.5　字数：212 千
版　　本：2000 年 9 月第 1 版　　2001 年 4 月第 2 次印刷
印　　数：2021～3020 册
书　　号：ISBN 7－113－03854－9/O·81
定　　价：16.70 元

前　言

组合数学是一个历史悠久又是近年来发展很快的数学分支。它与数论、线性代数、群论、域论、格论等有密切联系，而且有其广泛的的应用。

图论原本是组合数学这个“家族”的主要成员。它的起源可追溯到1736年欧拉关于哥尼斯堡七桥问题的研究。20世纪30年代后，由于科学技术发展促进离散数学模型的发展，使图论不断成长壮大，形成一门独立的学科。

组合数学与图论是大学数学专业普遍开设的课程，也是计算机科学等许多相关专业所需的课程。尤其是1999年教育部颁发的《中小学教师继续教育课程开发指南》已把《组合数学与图论》引入数学教师继续教育课程。为满足中学教师继续教育教学的需要和师范院校数学、计算机等专业开设选修课的需要，我们按《中小学教师继续教育课程开发指南》的要求，编写了此书。

编写这部教材，力求从我国社会发展的客观要求和继续教育的特点出发，体现时代的先进性和创新性；知识体系的科学性与系统性；数学教师继续教育的专业性和综合性；教材内容的应用性和针对性。在写作本书之前，我们认真地征求和吸收了各级教育行政部门主管续续教育的领导及部分省市教育学院的专家和一些中学教师对本书的编写意见，系统地查阅了国内外有关组合数学与图论方面的专著、教材、期刊杂志，注意消化、理解、吸收组合数学与图论新的研究成果，并尽可能地渗透到教材内容之中，考虑到中学数学教师和数学专业在校学生学完此门课程后，要应用到中学数学教学之中，所以本书特别在各章节中穿插了组合数学与图论应用的内容，因而使教材内容更具有实用性。

我们深知要写好一本教材绝非易事。虽然我们从事组合数学与图论的教学和研究工作十几年，也曾编写过相关学科的全国中小学教师继续教育教材，但是由于我们才力不逮，书中疏漏不当之处在所难免，恳请同行和读者不吝赐教。

在本书问世之际，对北京大学博士生导师徐明曜先生及各级教育行政部门的领导和有关院校的专家在我们编写的过程中，从编写思想到内容安排给予的热心指导、中国铁道出版社的鼎力支持，谨致谢忱！

作　者

2000 年 7 月

目　　录

第一篇　组合数学初步

第二篇　图　论

第一篇　组合数学初步

第一章　抽屉原理

§1.1　集合的基本概念

集合是数学上不定义的概念,它是具有某种性质的一组事物的概念之抽象.对于集合(也可简称为集),我们关心的是哪些属于它.我们称属于某个集合的事物为该集的元素或元,所谓给出一个集合即指明该集合所包含的元素.

当集合中元素的个数为有限时,则称该集合为有限集,否则称其为无限集.

具有某种性质 p 的元素所构成之集合 A 可表示为

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }p\}.$$

例如,$A=\{x\mid x$ 是非负整数$\}$即表示所有非负整数构成的集合.也可用列出集合的所有元素的方式来表示一个集.

例如,$S=\{a,b,c,d,e\}$即表示有五个元素的集合.当集合中元素具有一定的规律时,也可以用列出其部分元素,然后用省略号表示其余元素.

例如,非负整数集 A 可表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}.$$

我们强调指出，一个集合中的元素是确定的. 也就是说，对于给定的一个集合 S 来说，任何一个对象或元素 a，它或者属于集合 S，或者不属于集合 S，二者必居其一. 当 a 属于 S 时，则记作 $a \in S$；当 a 不属于 S 时，记为 $a \notin S$. 如果一个集合 S 不包含任何元素，则称它为空集，并记为 $S = \varnothing$. 只含一个元 a 的集 $\{a\}$ 称为单元集.

若 A, B 为两个集，且 B 中任一元都是 A 的元，则称 B 为 A 的子集，记作 $B \subseteq A$ 或记作 $A \supseteq B$. 也可说 B 含于 A，或说 A 包含 B. 若两个集 A 与 B 所包含的元相同，即 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$，则称两个集合 A 与 B 相等，并记作 $A = B$.

除集合的包含关系外，还可以建立集合之间的一些代数运算：

两个集 A 与 B 的并集合，指的是由集 A 和集 B 的所有元素所组成的集合，记作 $A \cup B$，即 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$；

两个集 A 与 B 的交集合，指的是由集 A 和集 B 的一切公共元素所成之集，记作 $A \cap B$，即 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$；

两个集 A 与 B 的差集合，指的是由属于集合 A 但不属于集合 B 的元素所成之集，记作 $A \setminus B$，即 $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$；.

特别当 $B \subseteq A$ 时，称 $A \setminus B$ 为 B 关于 A 的补集. 而当 A 为所讨论的全集时，称 B 关于 A 的补为 B 的补集，并记 $A \setminus B = \bar{B}$.

关于集合的并、交、补运算，有如下的运算律：

(1) 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C;$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

(2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A;$$
$$A \cap B = B \cap A;$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

(4) 狄·莫根律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

下面只对$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$给出证明.

设$x\in\overline{A\cup B}$,则$x\notin A\cup B$,而$x\notin A\cup B$等价于$x\notin A$和$x\notin B$同时成立,即$x\notin A\cup B\Rightarrow x\in\overline{A}$且$x\in\overline{B}$,即$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$;

这表明$x\in\overline{A\cup B}\Rightarrow x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,故

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cap\overline{B} \tag{1}$$

另一方面,设$x\in\overline{A}\cap\overline{B}$,$x\in\overline{A}$且$x\in\overline{B}$,故$x\notin A$且$x\notin B$,这等价于$x\notin A\cup B$,亦即$x\in\overline{A\cup B}$.

这表明$x\in\overline{A}\cap\overline{B}\Rightarrow x\in\overline{A\cup B}$,故

$$\overline{A}\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B} \tag{2}$$

由(1)、(2)即得:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

最后我们给出复合集(或称为重集)的概念.

复合集也是数学上不定义的概念,它与前面讨论的普通集合(我们在不加说明时提到的集合均指普通集合)的不同之处在于其成员不必互异.例如,我们将具有三个a,两个b,1个c的集合S记为$S=\{a,a,a,b,b,c\}$或$S=\{3\cdot a,2\cdot b,1\cdot c\}$,其中3,2,1分别称为元素$a,b,c$的重复数.

例如,$S=\{n_1\cdot a_1,n_2\cdot a_2,n_3\cdot a_3,n_4\cdot a_4\}$,其中$a_1,a_2,a_3,a_4$为不同的元素,$n_1,n_2,n_3,n_4$为非负整数,则$S$是一个复合集,而当$n_i=0$时元素$a_i$的重复数为0,此时显然表明$S$中不包含元素$a_i$.特别当$n_1=n_2=n_3=n_4=1$时,$S$为通常的集合$S=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$.在这个意义上,若将复合集作为原始概念,则集合(即通常意义下的集合)就是可定义的:集就是其元素的重复数全部为1的复合集.

为了不限制元素的重复次数,可以允许重复数为∞(这里没有必要区分重复数为可数无穷或不可数无穷等等).

例如,设复合集S中,a,b的出现次数不限,c最多出现4次,d最多出现2次,则可记作$S=\{\infty\cdot a,\infty\cdot b,4\cdot c,2\cdot d\}$.

类似地可以定义复合集的包含关系,以及并、交及差的运算:

设 S_1 和 S_2 是两个复合集,若 S_1 中每一元素的重复数都不大于 S_2 中对应元素的重复数,则称 S_1 包含于 S_2,或称 S_1 是 S_2 的子集,并记为 $S_1 \subseteq S_2$.

两个复合集 S_1 和 S_2 的并集表示为 $S_1 \cup S_2$,它表示由 S_1 和 S_2 的所有不同元素所构成的复合集,且每个元素的重复数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重复数的最大者.

例如,设 $S_1 = \{3 \cdot a, c, 2 \cdot d\}$, $S_2 = \{2 \cdot a, b, 2 \cdot c\}$,则 $S_1 \cup S_2 = \{3 \cdot a, b, 2 \cdot c, 2 \cdot d\}$.

两个复合集 S_1 和 S_2 的交集也是一个复合集,它的每一个元素的重复数定义为该元素在 S_1 和 S_2 中重复数的最小者(当某个元素不在该集合中时,我们称它在该集中重复数为 0),并记为 $S_1 \cap S_2$,如上例中,有 $S_1 \cap S_2 = \{2 \cdot a, c\}$;

两个复合集 S_1 和 S_2 的差,记为 $S_1 \setminus S_2$,也是一个复合集,它的每一个元素的重复数等于它在 S_1 中的重复数减去在 S_2 中的重复数得到的差与数 0 这两个数中之最大者.例如上例中 $S_1 \setminus S_2 = \{a; 2 \cdot d\}$.

一个复合集 S,如果 S 中每一个元素的重复数都是有限数,则称 S 为重复数有限的复合集;否则,称 S 为重复数无限的复合集.

§1.2 抽屉原理

把 $n+1$ 个或者更多的物体放到 n 个集合之中,那么至少有一个集合里要放进两个或更多的物体,这就是"抽屉原理"的最简单的形式.抽屉原理也称之为鸽笼原理或鞋箱原理,虽然它的正确性十分明显,很容易被并不具备多少数学知识的人所接受,但是如果将其灵活地运用,即可得到一些意想不到的效果.各种形式的抽屉原理,在初等数学乃至高等数学中经常采用.

定理 1.2.1 把多于 n 个的元素按任一确定的方式分成 n 个集合,则一定有一个集合中含有两个或两个以上的元素.

证明 若每个集合中所含元素的数目均不超过 1，则这 n 个集合中所含元素个数就不会超过 n，这与已知有多于 n 个的元素相矛盾.

例 1.2.1 在一个13人的小组中，至少有 2 个人的生日在同一个月.

例 1.2.2 同年出生的370个人中，一定有 2 个人是同月、同日出生的.

例 1.2.3 根据常识，一个人的头发根数不会超过 20 万. 因此，在一个拥有 20 万以上人口的城市中，一定可以找到两个人，他们的头发根数相同.

例 1.2.4 抽屉里有10双颜色不同的手套，从中任意取出 11 只来，则这 11 只中至少有 2 只是完整配对的.

定理 1.2.1 还有以下更一般的形式.

定理 1.2.2 把多于 $m \times n$ 的元素按任一确定的方式分成 n 个集合，则一定有一个集合中含有 $m+1$ 或 $m+1$ 个以上的元素.

证明 假若每个集合中所含元素的数目均不超过 m，则这 n 个集合所含元素个数就不会超过 $m \times n$，显然题设矛盾.

定理 1.2.3 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正整数. 若将 $a_1 + \cdots + a_n - n + 1$ 个元素分成 n 个集合，则或者第一个集合中至少有 a_1 个元素，或者第二个集合中至少有 a_2 个元素，…，或者第 n 个集合中至少有 a_n 个元素.

证明 若第一个集合中至多有 $a_1 - 1$ 个元素，第二个集合中至多有 $a_2 - 1$ 个元素，…，第 n 个集合中至多有 $a_n - 1$ 个元素，则 n 个集合中至多有：

$$(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_n - 1) =$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n <$$
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n + 1$$

这与题设矛盾.

显然，当元素个数多于 $(a_1 - 1) + (a_2 - 1) + \cdots + (a_n - 1)$ 时，定

理 1.2.3 的结论成立.

在定理 1.2.3 中,若取 $a_1=a_2=\cdots=a_n=2$,则可得定理 1.2.1. 若取 $a_1=a_2=\cdots=a_n=m+1$,则可得定理 1.2.2.

定理 1.2.4 把无穷个元素按任一确定的方式分成有穷个集合,则至少有一个集合中仍含无穷个元素.

证明 假若每个集合中都只含有穷多个元素,则这有穷个集合只能包含有穷个元素,这与题设矛盾.

上面的四个定理,都称为抽屉原理,由我们的证明可知,它们都是非常简单的. 可是,正是这样一些简单的原则,在初等数学乃至高等数学中,有着许多应用. 巧妙地运用这些原则,可以很顺利地解决一些看上去相当复杂,甚至觉得简直无从下手的数学题目.

§1.3 应用举例

例 1.3.1 在边长为1的正方形内任意放置五个点,求证:其中必有两点,这两点之间的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

证明 将这个正方形的两对对边上的中点连接起来,把它分成 4 个大小相等的小正方形. 在大正方形里任放 5 个点,就相当于把 5 个点以任一确定的方式投放在这 4 个小正方形中. 于是由定理1.2.1 知,必有一个小正方形,其中包含两个或两个以上的点,对于其中的两点,它们之间的距离不会超过小正方形对角线的长度(即大正方形对角线长度的一半),即不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 1.3.2 在边长为1的正方形中,任意放入 9 个点,求证:在以这些点为顶点的许许多多三角形中,必有一个三角形,它的面积不超过$\frac{1}{8}$.

证明 用三条平行于上下底边的直线,把正方形分成 4 个大小相等的长方形. 9 个点任意放入这 4 个长方形中,根据定理 1.2.2,即

多于 2×4 个点放入 4 个长方形中，则至少有 $2+1$ 个点(即三个点)落在某一个长方形之内.则以这三点为顶点的三角形的面积不会超过该长方形面积的一半，即小于等于 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

例 1.3.3 某次会议有 n 位代表参加，且每一位代表至少认识其余 $n-1$ 位代表中的一位.求证：在这 n 位代表中，至少有两位认识的代表人数相同.

证明 构造 $n-1$ 个“房间”，使第 k 个房间中的人恰好认识 k 位代表，其中 $k=1,2,\cdots,n-1$.现共有 n 位代表要“进入”这 $n-1$ 个房间，故由定理 1.2.1 即知：至少有两位代表进入同一个房间，即这两位认识的代表人数相同.

例 1.3.4 从全世界任选6个人，其中一定可以找出这样三个人，使得他们互相都认识，或者互相都不认识.

证明 在这 6 个人中任意指定一个人，记为 A，于是可将其余的五个人分为两类：一类中的人与 A 互相认识，另一类中的人与 A 互相不认识.由定理 1.2.2 知，至少有一类的人数不小于三.不妨设至少有三人与 A 互相认识，且假定 B、C、D 三人与 A 互相认识.

此时，必定会出现下列两种情况之一：

(1) B、C、D 三者之间至少有两人互相认识，且不妨设 B 与 C 互相认识.这样，A、B、C 三人互相都认识，命题成立.

(2) B、C、D 三者之间互相都不认识，显然命题也成立.

例 1.3.5 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为给定的 m 个整数，证明：一定存在满足条件：$0\leqslant k<l\leqslant m$ 的整数 k,l，使得 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 可被 m 整除.

证明 先作出 m 个和 $S_1=a_1, S_2=a_1+a_2,\cdots,S_m=a_1+a_2+\cdots+a_m$.

显然，若有一个 S_i 可被 m 整除，则结论成立.且此时 $k=0$，$l=i$.

如果用 m 去除上面任一个和所得的余数均非零，即余数分别为

$1,2,\cdots,m-1$ 中的一个数.但现在有 m 个和,而只有 $m-1$ 个可能的余数值,故由定理 1.2.1 知,其中至少有两个和,当它们被 m 除时具有相同的余数.这表明存在整数 k 和 l,满足 $0\leqslant k<l\leqslant m$,使得 $m\mid S_l-S_k$,,即 $a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_l$ 可被 m 整除.

例 1.3.6 从由1到 $2n$ 的整数中任取 $n+1$ 个数,则这 $n+1$ 个数中至少有一对数,其中一个数是另一个数的倍数.

证明 首先注意到,一个正整数或者本身是一个奇数,或者是一个偶数.如果该数是一个偶数,则经过反复地提取因数 2 后,总可以表示为:奇数 $\times 2^s$ 的形式(其中 $s=1,2,3,\cdots$).并且,这个奇数决不会超过原数的一半.

若容许 $s=0$,则奇数也可写成 $2^s\times$ 奇数的形式.于是任一正整数均可写成 $2^s\times a$ 的形式,其中 a 为奇数,s 为非负整数.

下设所取的 $n+1$ 个数是:$a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}$.

将这 $n+1$ 个整数都表示成 $2^s\times a$ 的形式,则 a 为满足 $1\leqslant a\leqslant 2n$的奇数,但从 1 到 $2n$ 中只有 n 个奇数,于是由抽屉原理知:必存在 $a_i\neq a_j$,但 $a_i=2^s\times a$,$a_j=2^k\times a$,不妨设 $a_i<a_j$,即 $s<k$,这表明 $a_j=2^{k-s}\times 2^s\times a=2^{k-s}\times a_i$,故 a_j 是a_i 的倍数.

例 1.3.7 一个棋手用11个星期来准备参加一次大型比赛,为了准备的更充分些,他决定每天至少下一局棋.但是,又为了使自己不至于太累,他又决定在任何一周内下棋的总局数不超过 12.证明:一定存在着连续的若干天,在此期间内该棋手恰好下了 21 局棋.

证明 用 a_i 表示这位棋手第 i 天所下棋的局数,则由题设可知 $a_i\geqslant 1\quad(i=1,2,\cdots,77)$.再记 $x_i=\sum_{k=1}^{i}a_k\quad(i=1,2,\cdots,77)$ 则有

$$1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_{77}\leqslant 12\times 11=132.$$

又令 $y_i=x_i+21\quad(i=1,2,\cdots,77)$ 则

$$22\leqslant y_1<y_2<\cdots<y_{77}\leqslant 153.$$

于是 $x_1,x_2,\cdots,x_{77},y_1,y_2,\cdots,y_{77}$,这 154 个整数均为 1 至 153 中的数.由抽屉原理知,其中至少有两个数相等.显然这两个数不能

同时为 $x_1,x_2,\cdots,x_{77}$中的数,也不能同时为 $y_1,y_2,\cdots,y_{77}$中的数.从而必存在整数 s 和 t,满足:$1\leqslant s\leqslant 77,1\leqslant t\leqslant 77$,使得

$$x_s=y_t=x_t+21.$$

上式表明必有 $t<s$,于是 $x_s-x_t=21$,即从第 $t+1$ 天至第 s 天这连续的 $s-t$ 天内,该棋手恰好下了 21 局棋.

例 1.3.8 设$a_1,a_2,\cdots,a_{n^2+1}$是 n^2+1 个互不相等的实数,证明:一定可从这 n^2+1 个数中选出 $n+1$ 个数,使它们构成严格单调增序列或严格单调减序列.

证明 将以 a_i 为首项的,且项数最多的下降序列的项数记为 N_i.则因为单由一个 a_i 本身即可看作一个下降序列,故得 $N_i\geqslant 1$.这表明,$N_1,N_2,\cdots,N_{n^2+1}$是 n^2+1 个正整数,如果其中某一个大于或等于 $n+1$,则结论就已经成立了,因为这时即可找出一个含有 $n+1$ 项的严格单调减序列.所以,下面只须讨论另外一种情况,即 $1\leqslant N_i\leqslant n(i=1,2,\cdots,n^2+1)$的情况.

当 n^2+1 个自然数 N_i 只能取 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个可能值时,由定理 1.2.2 知,它们之中至少有 $n+1$ 个数相等,不妨设:

$$N_{i_1}=N_{i_2}=\cdots=N_{i_{n+1}}$$

其中下标满足:

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_{n+1}\leqslant n^2+1.$$

现在我们证明:序列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{n+1}}$就是一个严格单调增序列.

用反证法.假若对某个 $s(s=1,2,\cdots,n)$有 $a_{i_s}>a_{i_{s+1}}$,则因 $i_s<i_{s+1}$,故将 $a_{i_{s+1}}$置于以 a_{i_s}开头的项数最多的下降序列之前,即可得到一个以 $a_{i_{s+1}}$为首项的下降序列,这表明:$N_{i_{s+1}}>N_{i_s}$,这与所设 $N_{i_1}=N_{i_2}=\cdots=N_{i_{n+1}}$矛盾.从而必有 $a_{i_1}<a_{i_2}<\cdots<a_{i_{n+1}}$.

这就是说:在原数列不包含由 $n+1$ 个数所组成的严格单调减序列时,必含有由 $n+1$ 个数所组成的严格单调增数列.

例 1.3.9 任意给定正整数 m,求证:一定存在正整数 n,使得 n 是 m 的倍数,且 n 完全由 0 和 1 两个数字组成.

证明 我们先介绍一下关于模 m 的剩余类的概念.

以一个任意固定的正整数 m 为模,可以把全体整数按照余数来分类:凡用 m 来除有相同余数的整数都归为一类.这样,便可把全体整数分成 m 个类:

$$[0] = \{km \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$[1] = \{km + 1 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[m-1] = \{km + m - 1 \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合.

下面给出例 1.3.9 的证明.

考察 $m+1$ 个正整数:

$$a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, \cdots, a_{m+1} = \underbrace{111\cdots1}_{m+1\text{个}1}.$$

把这 $m+1$ 个数归入关于模 m 的剩余类中,因只有 m 个剩余类,由定理 1.2.1,其中一定至少有两个数,比如 a_s 和 a_t(且不妨设 $s<t$),属于同一个剩余类.这表明 $a_t - a_s$ 是 m 的倍数,另一方面,由 a_s 和 a_t 的构成可知 $n = a_t - a_s$ 有下列形式:$11\cdots100\cdots0$.

这正是我们要证明的结论.

例 1.3.10 设 β 为任一实数,n 为任意给定的正整数.证明:必存在一对正整数 a、b,使得 $\left|\beta - \frac{b}{a}\right| < \frac{1}{na}$,并且其中的整数 a 还满足条件:$0<a\leqslant n$.

证明 令 $m_i = [i\beta]$, $i = 0,1,\cdots,n$,其中$[i\beta]$表示不超过 $i\beta$ 的最大整数.则有

$m_i \leqslant i\beta < m_i + 1$,即 $0 \leqslant i\beta - m_i < 1$.

把区间$[0,1)$分成下列 n 个小区间

$$[0,\frac{1}{n}), [\frac{1}{n},\frac{2}{n}), \cdots, [\frac{n-1}{n},1),$$

则由抽屉原理可知,$0\beta - m_0, \beta - m_1, \cdots, n\beta - m_n$ 这 $n+1$ 个数中至少有两个数落入上面 n 个小区间中的一个小区间,不妨设

$l\beta - m_l$与$k\beta - m_k$落入了一个小区间,且$0\leqslant k<l\leqslant n$.

$$|(l\beta - m_l)-(k\beta - m_k)|<\frac{1}{n},$$

亦即
$$|(l-k)\beta-(m_l - m_k)|<\frac{1}{n}.$$

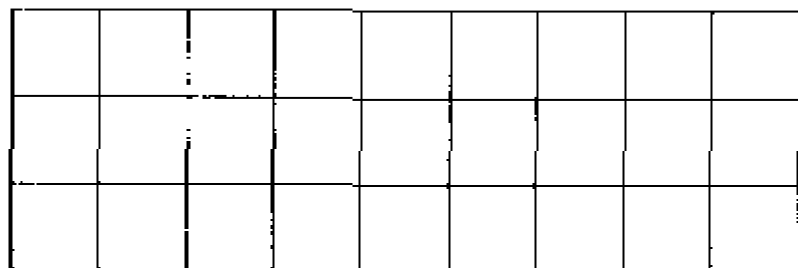
记$a=l-k,b=m_l-m_k$,则a、b都是整数,且$0<a=l-k\leqslant l\leqslant n$.这样就有:$|a\beta-b|<\frac{1}{n}$,再用正数$a$去除上式两边,这就证得了

$$\left|\beta-\frac{b}{a}\right|<\frac{1}{na}.$$

注 由于$a\geqslant1$,故由$\left|\beta-\frac{b}{a}\right|<\frac{1}{na}$,这样我们可以把$n$取得充分大,以使得$\frac{1}{na}$足够小;另外由不等式$a\leqslant n$可知,我们又可以控制有理数$\frac{b}{a}$的分母不致过大.从这两个意义上我们已经实现了用一个比较简单的分数来比较精确地逼近任何一个实数.

习题一

1.下图中画出3行9列共27个小方格,将每一个小方格涂上红色或者蓝色.证明:不论如何涂色,其中必至少有两列,它们的涂色方式相同.



2.在半径为1的圆周上任取$n+1$个点,求证:其中至少有两个点,它们的距离不超过$2\sin\frac{\pi}{n}$.

3. 有一个生产天平上用的铁盘的车间，由于工艺上的原因，只能控制盘子的重量在指定的 a 克到 $a+0.1$ 克之间. 现在需要重量相差不超过 0.005 克的两只铁盘来装配一架天平，问最少要有多少只盘子，才能从中挑出符合要求的两只铁盘？

4. 一个学生用 37 天来准备考试. 据以往经验，他知道不会需要超过 60 个小时的学习，同时他决定每天至少学习一小时. 证明：不管他如何安排学习时间(但每天学习的小时数是整数)，总有连续的若干天，在此期间他恰好学习了 13 个小时.

5. 在边长为 1 的等边三角形中任选 5 个点，证明：至少存在两个点，使这两个点之间的距离不超过$\frac{1}{2}$.

6. 在边长为 1 的等边三角形中任选 10 个点，证明，至少存在两个点，使这两个点之间的距离不超过$\frac{1}{3}$.

7. 由 5、6 两题，试确定这样的正整数 a_n，当从边长为 1 的等边三角形中任选 a_n 个点时，至少存在两点，使这两点之间的距离不超过$\frac{1}{n}$.

8. 设 a_1,a_2,a_3 为 3 个任意的整数，而 b_1,b_2,b_3 为 a_1,a_2,a_3 的任一排列，则 a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3 中至少有一个是偶数.

9. 任取 11 个整数，求证：其中至少有两个数，它们的差是 10 的倍数.

10. n 个实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，总存在某一个数 x_i，使得 $x_i\geqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

11. 在边长为 1 的正方体内，任意选定 9 个点，则其中必有两点，使得这两点之间的距离小于或等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

12. 任取黑白杂混围棋子 21 个，将其排成 3 行 7 列的长方形(即 3 行 7 列的矩阵). 求证：不论怎样排法，都可找到一个小长方形(即子阵)，使四个角上的子全是白子或者全是黑子(即子阵的角上四子

同色).

13. 设 m 是取定的一个自然数,求证:任取 $m+1$ 个整数,则其中至少有两个整数,其差是 m 的倍数.

第二章　排列与组合

§2.1　加法原理与乘法原理

定理 2.1.1　加法原理

设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均为有限集 A 的子集，且满足：

(1)　$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A$；

(2)　$A_i \cap A_j = \varnothing (i \neq j)$.

则有
$$|A| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|,$$
式中 $|A|$ 表示集合 A 中所含元素个数.

定理 2.1.1 的证明可用数学归纳法完成.

加法原理是基本的计数法则之一，也可叙述为：如果一些物件可以分成互不相交的 m 类，各类中物件的个数分别为：$a_1, a_2, \cdots, a_m$，则物件总数为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$.

例 2.1.1　设由甲地到乙地，每天有4班火车，3 班汽车，1 班飞机. 问由甲地到乙地每天有多少种不同的走法?

解　可将由甲地到乙地的走法分为乘火车、乘汽车、乘飞机三类，且每一类中分别有：4、3、1 种走法，故由加法原理，每天有 $4+3+1=8$ 种不同的走法.

例 2.1.2　大于0而小于 10 的偶数有 4 个，可记为 $A_1 = \{2, 4, 6, 8\}$；大于 0 而小于 10 的奇数有 5 个，即 $A_2 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$；又记大于 0 而小于 10 的整数集合为 A. 而 $A = A_1 \cup A_2$，且 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$，故由加法原理有 $|A| = |A_1| + |A_2|$.

定理 2.1.2　乘法原理

设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 均为有限集，则

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|$$

式中 $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ 称为 A 与 B 的 *Cartesian* 乘积. 例如，$A = \{(a_1, a_2)\}$，$B = \{(b_1, b_2, b_3)\}$，则 $A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$. 且 $|A| = 2$，$|B| = 3$，$|A \times B| = 6$.

乘法原理也是基本的计数原理之一，还可叙述为：如果一些物体由 m 种性质来确定：

第一种性质共有 n_1 种可能；第二种性质共有 n_2 种可能；…，第 m 种性质共有 n_m 种可能. 当 m 种性质都确定后，物体就唯一确定了，则物体总数为 $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ 种.

例 2.1.3 从甲地到丙地必须先经乙地. 而由甲地到乙地有 5 条不同的道路，从乙地到丙地有 4 条不同的道路，则由乘法原理可知，从甲地到丙地的道路数目为 $5 \times 4 = 20$ 条.

例 2.1.4 某国际会议洽谈贸易，其中有4家美国公司，3 家日本公司，6 家中国公司. 这些公司彼此都希望与异国的每个公司都洽谈一次，问共需要安排多少场次的会议？

解 先由乘法原理知：美日会谈需要安排 $4 \times 3 = 12$ 次；中美会谈需 $6 \times 4 = 24$ 次；中日会谈需 $6 \times 3 = 18$ 次. 再由加法原理可得，共需安排 $12 + 24 + 18 = 54$ 次会谈.

例 2.1.5 从1、2、3、4 这四个数字里，每次取出两个数字组成一个两位数，问：

(1) 若这两位数中的数字不允许重复使用，共能得到多少个不同的两位数？

(2) 若这两位数中的数字允许重复使用，共能得到多少个不同的两位数？

解 (1) 第一步从这四个数字里任选一个为十位数字，有 4 种方法；因为数字不许重复使用，第二步只能由剩下的三个数字里任选一个为个位数字，所以只有 3 种方法. 两步依次完成，组成两位数这

一事件即已完成,故由乘法原理可知,共能得到 $4\times3=12$ 个不同的且数字无重复的两位数.

(2) 第一步从这四个数字里任选一个为十位数字,有 4 种方法;因为数字允许重复使用,第二步可以再从原来的四个数字里任选一个为个位数字,所以仍有 4 种方法.于是由乘法原理可知,共能得到 $4\times4=16$ 个不同的且数字允许有重复的两位数.

从上面几个例子中,我们可以体会到,处理问题时何时用加法原理,何时用乘法原理,这是由问题的性质和要求所确定的.一般地说,如果一事件的完成有几类不同的方法,这些方法彼此间的关系是独立的,且任选一种方法都能达到完成事件的目的,则完成该事件的方法总数即是每一类方法数的和,用加法.

如果一事件的完成,必须分几个步骤,每个步骤可以有不同的方法,且每个步骤间的方法是交错串联的,即一个步骤中的任一种方法都与下一个步骤中所有的方法相连接,依次连续完成全部的步骤,才能达到完成该事件的目的,则完成这事件的方法总数即为每一步方法数的积,用乘法.

我们再举一例.

例 2.1.6 求比10 000小的正整数中,不含有数字 5 的数的个数.

解 为讨论方便起见,我们可将每一个小于 10 000 的正整数唯一地表示成一个形式上的"四位数",例如:1=0 001,13=0 013,215=0 215等等.

于是每一个不含数字 5 的"四位数"均可经四步而得到:第一步确定最高位数字,它有 9 种可能(不能取数字 5);依次下去每一步均有 9 种可能,故由乘法原理,共有:

$9\times9\times9\times9=6\ 561$ 个数,但其中 0 000 不是正整数,故共有 $6\ 561-1=6\ 560$ 个不含数字 5 且小于 10 000 的正整数.

§2.2 排列

一、相异元素不许重复的排列

定义 2.2.1 从 m 个元素里每次取出 n 个元素，按照一定顺序排成一列，叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的排列.

这里，要求给出的 m 个元素是相异的，不允许有相同的元素；取出的 n 个元素也是相异的，即不允许重复使用元素. 因此有：$1 \leqslant n \leqslant m$，$m$，$n$ 表示元素的个数，均为正整数. 且当 $m > n$ 时，叫做选排列，当 $m = n$ 时，叫做全排列.

只有当元素完全相同，且每个元素排列的位置也完全相同时，才是同一种排列. 例如，12，34 是两种不同的排列；12，13 也是两种不同的排列；12，21 还是两种不同的排列；而 12，12 才是同一种排列.

从 m 个元素里每次取出 n 个元素的所有排列种数，简称为排列数，记为 A_m^n 或 $P(m, n)$. m 个元素的全排列种数，简称为全排列数，记为 P_m.

从 m 个元素里，任意取出 n 个元素，把这 n 个元素所排列的位置分为第一个位置，第二个位置，…，第 n 个位置. 则第一个位置可从这 m 个元素里任意取出一个来放置，有 m 种方法；第二个位置可在剩下的 $m-1$ 个元素里任选一个来放置，有 $m-1$ 种方法；…依次下去，直到最后一个位置，即第 n 个位置，只能在剩下的 $m-(n-1)$ 个元素里任选一个来放置，有 $m-(n-1)$ 种方法. 故由乘法原理，共有

$m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)$种方法. 故

$$A_m^n = m(m-1)\cdots(m-n+1).$$

在上式中，令 $n = m$，则得

$$P_m = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

例 2.2.1 5台不同牌号的拖拉机，选调其中的 3 台分别支援三个生产基地，问有几种不同的分配方式?

解 此题可归结为从 5 个元素里选取 3 个元素的排列问题，故所求不同的分配方式共有

$$A_5^3=5\times4\times3=60 \text{ 种}.$$

例 2.2.2 一条铁路线上共有10个车站，问需准备多少种不同的车票？

解 显然，任一车站到其他 9 个车站都有车票，所以共有 $10\times9=90$种不同的车票，这种解法简单明了．但是由于这类问题在排列的应用问题里，具有其代表性，故我们考虑如何把它归结为排列问题来求解．

题中只提供了一个数据 10，但这个数是相当于定义中的 m 呢？还是 n 呢？为此，我们可作如下考虑：因为车票只关联到起点站与终点站，而与途中经过多少个站无关，且 10 个站中任何两个车站之间都有"来"、"往"两种不同的车票，表明与顺序有关．故可将其视为从 10 个元素里每次取出 2 个元素的排列，即 $m=10$，$n=2$，且得如下解法，不同的车票共有 $A_{10}^2=10\times9=90$ 种．

例2.2.3 从0，1，2，3，4，5，6 这 7 个数字里，每次取出 4 个来排列，则

(1) 有多少种没有重复数字的排列？

(2) 有多少个没有重复数字的四位数？

解 (1) 这是从 7 个元素里每次取出 4 个元素的排列问题，故共有：$A_7^4=7\times6\times5\times4=840$ 种．

(2) 因为数 0 在千位上的排列不是四位数，而 0 在千位上的排列种数，等于从 0 以外的 6 个数字里每次取出 3 个数字排列的种数，故没有重复数字的四位数有 $A_7^4-A_6^3=840-120=720$ 个．

例 2.2.4 按次序给定两类元素，其中 a 类元素为：甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸；b 类元素为：子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥．现从 a 类元素里选奇数位置的任一个排在末位；b 类元素里选奇数位置的任一个排在末位．又从 a 类里选偶数位的任一个排在首位，b 类里选偶数位的任一个排在末位．问这样两个元素的

排列共有多少种?

解 选奇数位的排列:a 类由甲、丙、戊、庚、壬 5 个元素里任选一个排在首位有 A_5^1 种;b 类由子、寅、辰、午、申、戌 6 个元素里任取一个排在末位有 A_6^1 种.从而由乘法原理知,选奇数位的排列共有 $A_5^1 \cdot A_6^1 = 30$ 种.

同理选偶数位的排列也有 $A_5^1 \cdot A_6^1 = 30$ 种.

又因为选奇数位的排列与选偶数位的排列各不相同,故由加法原理知,不同的排列共有 $A_5^1 \cdot A_6^1 + A_5^1 \cdot A_6^1 = 30 + 30 = 60$ 种.

我国古代历书把 a 类的 10 个元素,叫做天干,而把 b 类的 12 个元素叫做地支.同时以上述排列方法用以纪年,顺序是一个天干,一个地支,依次配合下去,即:甲子、乙丑、丙寅、…、癸酉;甲戌、乙亥、….经过 60 年恰好一个轮换,再从头开始.一些重大的历史事件,常以这种记年来记载.例如:甲午战争,戊戌变法,庚子赔款,辛丑条约,辛亥革命等等.现在仍沿用这种记年表述年龄,例如将 12 地支配合鼠、牛、虎、兔、龙、蛇、马、羊、猴、鸡、狗、猪等 12 个生肖,同一个生肖的人的年龄总是相差 12 的整数倍.

例 2.2.5 用0,1,2,3,4,5 这 6 个数字能组成多少个没有重复数字的六位奇数?

解 末位有 3 种取法(即 1,3,5 中的任一个),而首位有 4 种取法(去掉末位上已排定的那个奇数和数字 0),从而中间的四个数有 P_4 种排法(除去首末已排定的两个数字).因此由乘法原理知,共能组成 $4 \times P_4 \times 3 = 4 \times 24 \times 3 = 288$ 个没有重复数字的六位奇数.

例 2.2.6 有三面不同颜色的旗子,取一面或多面排成一纵列表示一种信号,问共可以表示几种不同的信号?

解 因为上下顺序不同时,表示不同的信号,故是一个排列问题,而取一面或多面都能各自独立地完成表达信号这一事件.所以,根据加法原理,不同的信号种数为:

$$A_3^1 + A_3^2 + A_3^3 = 3 + 6 + 6 = 15.$$

二、相异元素允许重复的排列

定义 2.2.2 从 m 个相异元素里,每次取出允许重复使用的 n 个元素,按照一定的顺序排成一列,叫做 m 个相异元素允许重复的 n 元排列,简称为重复排列.

现实生活中,到处可见到重复排列的运用,例如:自行车的牌照号码,汽车的牌照号码,用户的电话号码,通用的电报号码等等.

重复排列的方法,与不重复排列的方法是类似的,可以依次更换元素而得到所有的排列,只是多了元素重复取用的情况,我们可以根据重复排列的方法,求出计算重复排列数的公式.

例如,从 a、b、c 三个相异元素里,每次取出两个元素的重复排列,可由下面的方法计算其排列种数:排在首位的,可以是 a、b、c 中的任一个,有三种方法;因为元素允许重复使用,所以排在第二位(也就是末位的),仍可以是 a、b、c,还是有三种方法.故由乘法原理,排列种数是:$3\times 3=9$.

一般地说,m 个相异元素允许重复的 n 元排列,把取出的 n 个元素分别排在 n 个位置上,因为元素允许重复使用,故每个位置上的元素都有 m 种方法,故由乘法原理,排列种数是 m^n.需要说明的是在元素不重复的排列里有 $m\geqslant n$ 的条件限制,而在元素允许重复的排列里,m 与 n 之间的关系则无任何限制.

利用复合集的概念,我们还可将上面的结论叙述为:

定理 2.2.1 设 S 为具有 m 个不同元素,且每个元素的重复数都是无穷的一个复合集,则从 S 中任取 n 个元素的排列种数为 m^n.

例 2.2.7 无线电通讯中,有"·"与"-"两种不同的信号.用 4 个信号代表一个数字,问共可以表示多少个不同的数字?

解 从两种不同的信号中取用 4 个,显然是允许重复的排列.若用记号 a_1 表示"·",a_2 表示"-",则此问题可视为从复合集 $S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2\}$ 中任取 4 个元素的排列数,故由定理 2.2.1 知,共可以表示 $2^4=16$ 个不同数字.

例 2.2.8 通用电报号码中,用 4 个数字代表一个汉字,问共可

表示多少个不同的汉字?

解 问题可看作是从复合集:$S=\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot 9\}$中每次取出 4 个元素的排列数,故由定理 2.2.1 知,共可表示$10^4=10\ 000$个不同的汉字.

例 2.2.9 不超过四位的三进制数有多少个?

解 问题就是求复合集 $S=\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\infty\cdot 2\}$中每次取出 4 个元素的排列数,它等于 $3^4=81$ 个.

例 2.2.10 把3封信投入 4 个信箱,问共有多少种不同的投信方法?

解 这个问题可换一种提法:设有 $a_1,a_2,a_3,a_4$4 个不同的信箱,且每一个信箱里均有"无穷"封信(事实上只要认为每个信箱里放有足够多,如在本例中需多于或等于 3 封即可),问从这 4 个信箱中任取 3 封信共有多少种不同的取法?于是问题可表为求复合集:$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\infty\cdot a_3,\infty\cdot a_4\}$中每次取出 4 个元素的排列数,它等于$4^3=64$.故本题中共有 64 种不同的投信方法.

本例中的问题极具代表性,例如:4 个人住 6 个房间,问有多少种不同的住法?又如将 5 个球放入 8 个筐子,问有多少种不同的放法?等等都可以用同样的方法求解.

这里,特别要强调的是要分清题目中的 m 与 n,即复合集中不同元素的个数 $m=?$,以及选取的元素个数 $n=?$.如例 2.2.10 中,$m=4,n=3$,若将这两个数字弄混,则可得例 2.2.10 的答案为 $3^4=81$ 个,但这显然是错误的,事实上,对每一封信来说,都有 4 种投放方法,故对于 3 封信共有 $4^3=64$ 种投放方法.但对于每一个信箱来说,其放入信的方法是很复杂的,且前面信箱的放信方法还要影响到后面信箱的放入方法.这一点,希望读者在作题时一定要细心体会.

例 2.2.11 问由1,2,3,4,5 这五个数字能组成多少个大于23 400的五位数?

(1) 数字不允许重复;

(2) 数字允许重复使用.

解 (1) 因为要求五位数大于 23 400,故可分为如下几种情况:

(a) 3,4,5 分别在万位,各有 $4! = 24$ 个;

(b) 2 在万位,4,5 分别在千位,各有 $3! = 6$ 个;

(c) 2 在万位,3 在千位,4,5 分别在百位,各有 $2! = 2$ 个;

从而符合条件的五位数共有:

$$24 \times 3 + 6 \times 2 + 2 \times 2 = 72 + 12 + 4 = 88 \text{ 个}.$$

(2) 因为数字允许重复使用,且要求五位数大于 23 400,故也可分为如下几种情况:

(a) 3,4,5 分别在万位,各有 $5^4 = 625$ 个;

(b) 2 在万位,4,5 分别在千位,各有 $5^3 = 125$ 个;

(c) 2 在万位,3 在千位,4,5 分别在百位,各有 $5^2 = 25$ 个;

从而符合条件的五位数共有

$$625 \times 3 + 125 \times 2 + 25 \times 2 = 2\,175 \text{ 个}.$$

三、圆周排列(循环排列)

我们前面所讲的排列为线性排列.下面给出定义.

定义 2.2.3 在 m 个相异元素中,每次取 n 个元素(这 n 个元素也要求不能有重复)排在一个圆周上,叫做一个圆周排列.

定理 2.2.2 在 m 个相异元素中,每次取 n 个不同元素的圆周排列种数为$\dfrac{A_m^n}{n}$.

证明 设所求的圆周排列种数为 x,则对每一个取定的圆周排列,分别以其中每一个元素为第一个元素,依次逆时针旋转到最后一个元素,则可得到 n 个不同的线性排列,且不同的圆周排列所得到的线性排列也一定彼此不同,故应有 $xn \leqslant A_m^n$;

另外,显然每一个 n 元的不重复的线性排列,都可由相应的一个圆周排列而得到,故亦应有 $xn \geqslant A_m^n$.

这样即得到了 $x = \dfrac{A_m^n}{n}$.

例 2.2.12 假定10个孩子排成一圈按逆时针方向行走,问有多少种不同的方法使他们形成一个圆圈?

解 由于孩子们在运动,重要的是他们相互间的位置关系,而不在于某一瞬间他们的绝对位置.故这是一个圆周排列问题,这里 $m=n=10$,故所求排列方法为$\frac{10!}{10}=9!$ 种.

例 2.2.13 8人围一圆桌开会,其中正、副组长各 1 人,记录 1 人.

(1) 若正副组长相邻而坐,有多少种坐法?

(2) 若记录人坐于正副组长中间,有多少种坐法?

解 (1) 正副组长相邻而坐,可将此 2 人当作 1 人来看,即看作 7 人围坐一圆桌的问题,有$\frac{7!}{7}=6!=720$ 种坐法.又因为正副组长 2 人可以易位,有 $2!=2$ 种坐法.故所求坐法为:

$$6!\times 2!=720\times 2=1\,440 \text{ 种}.$$

(2) 若记录者坐在正副组长中间,可将此 3 人当作 1 人看,即看作 6 人围坐一圆桌,共有$\frac{6!}{6}=5!=120$ 种坐法.又因为正副组长 2 人可以易位,有 $2!=2$ 种坐法.故所求坐法为:

$$5!\times 2!=120\times 2=240 \text{ 种}.$$

例 2.2.14 4男 4 女围成一圈,男女相间排列,问有多少种排法?

解 如果先排 4 个男的,它的排列数为$\frac{4!}{4}=3!=6$ 种.再将 4 个女的插人其间,这时圆圈上有 4 个不同的位置,其排列数为 4!,由乘法原理,所求的排法总数为:

$$3!\times 4!=6\times 24=144 \text{ 种}.$$

例 2.2.15 由20颗不同颜色的珍珠可以串成多少种不同的项链?

解 因为项链不仅可以旋转,而且也可以翻转过来而没有质的改变,即两个不同的圆周排列可以认为是同一条项链,从而共可串成

$\frac{20!}{20}\div 2==\frac{19!}{2}$种不同的项链.

例 2.2.16 商品展览,有用 6 颗不同颜色的钻珠穿成的手镯,若

(1) 展品橱内要有钻珠所有不同排法的手镯齐全,问至少应准备多少个手镯?

(2) 如果要选购包括钻珠所有不同排法的手镯,问至少要购买多少个手镯?

解 (1) 展览品放在玻璃橱窗内,不能翻动,故这是一个圆周排列问题,所以至少要:

$$\frac{6!}{6}=5!=120.$$

(2) 商品从橱窗内取出后,可以任意翻动,无需考虑顺、逆时针的方向,所以至少要:

$$\frac{6!}{6}\div 2=5!\div 2=60.$$

例 2.2.17 教师两人、学生 6 人,师生 8 人围桌而坐,在下面几种不同的约束条件下,可有几种不同的坐法.

(1) 不附任何其他的条件;

(2) 两位教师必须在相邻的位置;

(3) 两位教师不在相邻的位置;

(4) 学生甲在两位教师之间.

解 (1) 这是 8 个元素的圆周排列问题,故不同的坐法有:

$$\frac{8!}{8}=7!=5\,040\text{ 种}.$$

(2) 相当于 7 个相异元素的圆周排列,但教师两人可以调换位置,故不同的坐法有:$\frac{7!}{7}\times 2!=6!\times 2!=1\,440$ 种.

(3) 此问题恰为前面两题所得坐法数之差,故不同的坐法有:$7!-6!\times 2!=5\,040-1\,440=3\,600$ 种.

(4) 相当于6个相异元素的圆周排列，且两位教师可调换位置，故不同的坐法有：$\frac{6!}{6}\times 2!=5!\times 2!=120\times 2=240$ 种.

§2.3 组合

一、相异元素不许重复的组合

定义 2.3.1 从 m 个元素里每次取出 n 个元素，不管怎样的顺序并成一组，叫做从 m 个元素里每次取出 n 个元素的组合.

这里要求给出的 m 个元素是相异的，取出的 n 个元素也是相异的，且 $1\leqslant n\leqslant m$.

只要所取的 n 个元素完全相同，不论这 n 个元素是怎样的一个排列顺序，它们均是一种相同的组合. 例如，12，43，是两种不同的组合；12，13，也是两种不同的组合；但 12，21 就是两种相同的组合.

从 m 元素里每次取出 n 个元素的所有组合种数，简称为组合数，用符号 C_m^n 来表示. 也可记作 $C(m,n)$，或 $\binom{m}{n}$.

从 m 个元素里，每次取出 n 个元素的所有组合，如果已经写出，则将每一种组合中的 n 个元素，尽一切可能有的顺序再排列，可得到 P_n 种排列. 因为所有的组合有 C_m^n 种，所以转化成所有的排列有 $P_n\cdot C_m^n$ 种. 但是，所有的排列(从 m 个元素中任取 n 个元素的排列)又应该是 A_m^n 种，因此得到 $P_n\cdot C_m^n=A_m^n$. 即

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

上式即为计算从 m 个元素里每次取出 n 个元素的组合数的公式，其形式上是一个分式，但实质上它表示一个整数. 从而由这个公式还可得出整数的这样一个性质：任意 n 个连续整数的乘积必可被 $n!$ 整除.

例 2.3.1 期末考试的试卷上共有 7 个题目，要求任选 4 题进行解答，问有多少种不同的选题方法？

解 显然这是一个与顺序无关的问题，故共有 $C_7^4=\frac{7!}{4!\ 3!}=35$ 种选题方法.

例 2.3.2 要从12个题目里的最前面5个题里任选3题，再从接下去的4个题目里任选2题，最后的3个题中任选一题，问共有多少种不同的选题方法？

解 有 $C_5^3\cdot C_4^2\cdot C_3^1=180$ 种选题方法.

例 2.3.3 从0、1、3、7、13、29这6个数字里：(1) 每次取出3个数相加，有几个不同的和？(2) 每次取出3个数相乘，有几个不同的积？

解 (1) 显然是组合问题，因为和与加数的次序无关．且易知不会有3个数不完全相同但其和却相同的情况发生，故共有 $C_6^3=20$ 个不同的和.

(2) 因为积与乘数的次序无关，故也是组合问题．且1、3、7、13、29这5个数中取任意3个相乘，都是不同的积；但0乘以任何数都为0，故含有乘数0的积只能算一种积，从而不同的积有 $C_5^3-1=11$ 个.

例 2.3.4 教室里有5个电灯，问开灯照明有几种不同的方法？

解 因为开灯照明，只与开灯的多少有关，而与开灯的先后顺序无关，故这是一个组合问题．而对于 $k(k=1,2,3,4,5)$ 个灯恰有 C_5^k 种方法，从而根据加法原理，不同的开灯方法有 $C_5^1+C_5^2+C_5^3+C_5^4+C_5^5=31$ 种.

另解 我们从5个电灯每次开1个，开2个，…，或开5个这一事件视为分5个步骤依次连续完成的．即从第一个灯开始，每一个灯都有"打开"或"不开"的两种情况，根据乘法原理，5个灯就有 $2\times2\times2\times2\times2=2^5$ 种情况发生．但既是照明，则至少应有一个灯打开，因此一个灯都不开的情况应予排除，故不同的开灯方法共有 $2^5-1=31$ 种.

比较上面两种解法，应有

$$C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 - 1.$$

一般地说，从 m 个相异元素里，每次取出 1 个，2 个，…，m 个的所有组合数的总和为

$$C_m^1 + C_m^2 + \cdots + C_m^m = 2^m - 1.$$

例 2.3.5 有12张币值 1 分、2 分、5 分、1 角、2 角、5 角、1 元、2 元、5 元、10 元、50 元、100 元的人民币各一张，问能组成多少种不同的币值？

解 注意到既可取一张，又可取多张，且在取多张时，先取或后取某一张，不影响这几张的总币值. 又因为任一张币值都大于所有小于它的币值的和，故共能组成

$$C_{12}^1 + C_{12}^2 + C_{12}^3 + \cdots + C_{12}^{12} = 2^{12} - 1 = 4\ 095$$

种不同的币值.

因为最小的币值是 1 分，最大的币值是 12 张币值的和，即16 888分，由 4 095<16 888 知由 1 分到16 888分中间有许多币值不能由这 12 张纸币组成.

例 2.3.6 有10个砝码，重量分别为 1 克、2 克、2^2 克、…、2^9 克，问能称出多少种整克重的重量？

解 因为任一个砝码的重量都大于所有小于它的砝码的重量之和. 故能够称出的的种数为：

$$C_{10}^1 + C_{10}^2 + \cdots + C_{10}^{10} = 2^{10} - 1 = 1\ 023.$$

因为给出的十个砝码的全部重量之和为

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 1\ 023(\text{克})$$

而现在又能称出 1 023 种不同的重量，故这 10 个砝码可以称出从 1 起连续到 1 023 的所有整数克的重量.

二、组合数 C_m^n 的性质

性质 1 $C_m^n = C_m^{m-n}$

证明 $$C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,[m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = C_m^n.$$

性质 1 可以做如下解释：从 m 个元素里每次取出 n 个元素，同时就剩下 $m-n$ 个元素，每次取的元素既不相同，则每次剩的元素也不相同，从而有多少种取法，就有多少种剩法，就元素而言，不过是将 m 个元素分成两组，一组是 n 个元素，另一组是 $m-n$ 个元素而已．因此从 m 个元素里每次取出 n 个元素的组合种数，等于从 m 个元素里每次取出 $m-n$ 个元素的组合种数，即 $C_m^n = C_m^{m-n}$．

性质 2 $C_m^{n-1}+C_m^n=C_{m+1}^n$．

证明 $C_m^{n-1}+C_m^n=\dfrac{m!}{(n-1)!\ (m-n+1)!}+\dfrac{m!}{n!\ (m-n)!}=$

$$\frac{m!\ \cdot n}{n!\ (m-n+1)!}+\frac{m!\ \cdot(m-n+1)}{n!\ (m-n+1)!}=$$

$$\frac{m!\ [n+(m-n+1)]}{n!\ [(m+1)-n]!}=\frac{(m+1)!}{n!\ [(m+1)-n]!}=C_{m+1}^n.$$

性质 2 也可解释为：从 $m+1$ 个元素里，每次取出 n 个元素的所有组合，可以分为两类，一类含有某个特定的元素，其组合数是 C_m^{n-1}；另一类是不含有这个特定的元素，其组合数是 C_m^n．显然，这两类组合数的和等于这 $m+1$ 个元素中每次取出 n 个元素的组合数 C_{m+1}^n．

性质 3 对于取定的 m 值，在 $m+1$ 个组合数 $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \cdots, C_m^{m-1}, C_m^m$ 中，满足

(1) 若 m 为奇数，则 $C_m^{\frac{m-1}{2}}=C_m^{\frac{m+1}{2}}$ 为最大值，且

$$C_m^0<C_m^1<\cdots<C_m^{\frac{m-1}{2}}=C_m^{\frac{m-1}{2}},$$

$$C_m^{\frac{m-1}{2}}=C_m^{\frac{m+1}{2}}>C_m^{\frac{m+3}{2}}>\cdots>C_m^{m-1}>C_m^m;$$

(2) 若 m 为偶数，则 $C_m^{\frac{m}{2}}$ 为最大值，且

$$C_m^0<C_m^1<\cdots<C_m^{\frac{m}{2}},$$

$$C_m^{\frac{m}{2}}>C_m^{\frac{m}{2}-1}>\cdots>C_m^{m-1}>C_m^m.$$

证明 因为 $\dfrac{C_m^n}{C_m^{n-1}}=\dfrac{m-n+1}{n}$,

所以，当 $\frac{m-n+1}{n} < 1$ 时，$C_m^n < C_m^{n-1}$；

当 $\frac{m-n+1}{n} = 1$ 时，$C_m^n = C_m^{n-1}$；

当 $\frac{m-n-1}{n} > 1$ 时，$C_m^n > C_m^{n-1}$.

即
$$\begin{cases} n > \frac{m+1}{2} \Rightarrow C_m^n < C_m^{n-1} \\ n = \frac{m+1}{2} \Rightarrow C_m^n = C_m^{n-1} \\ n < \frac{m+1}{2} \Rightarrow C_m^n > C_m^{n-1} \end{cases} \qquad (2.3.1)$$

故当 m 为奇数时，有两个最大值，$C_m^{\frac{m-1}{2}} = C_m^{\frac{m+1}{2}}$. 而当 m 为偶数时，只有一个最大值 $C_m^{\frac{m}{2}}$. 关于性质 3 中所给出的几个不等式，由(2.3.1)式立即可以得到证明.

例 2.3.7 x 是什么数时，C_{14}^x 最大，求出这个最大值.

解 因为 14 是偶数，所以 $x = \frac{14}{2} = 7$ 时，C_{14}^x 的值最大，且 $C_{14}^7 = \frac{14!}{7!\ 7!} = 3\,432$.

例 2.3.8 x 是什么数时，C_{11}^x 最大，求出这个最大值.

解 因为 11 是奇数，所以 $x = \frac{11-1}{2} = 5$ 与 $x = \frac{11+1}{2} = 6$ 时，C_{11}^x 均为最大值. 且这个最大值是 $C_{11}^5 = C_{11}^6 = \frac{11!}{6!\ 5!} = 462$.

三、相异元素允许重复的组合

定义 2.3.2 从 m 个相异元素里，每次取出允许重复使用的 n 个元素，不管怎样顺序并成一组，叫做 m 个相异元素允许重复的 n 元组合，简称为重复组合.

为区别起见，称前面所介绍的组合为不重复组合. 显然在不重复组合中受条件 $m \geqslant n$ 的限制，在重复组合里已没有必要了.

m 个相异元素允许重复的 n 元重复组合数,通常用符号 H_m^n 来表示.

为了求出计算 H_m^n 的一般公式,我们先来看两个简单的例子.

例 2.3.9 从 a_1, a_2 两个元素里,每次取出 3 个元素的重复组合,有下列 4 种:$a_1a_1a_1$;$a_1a_1a_2$;$a_1a_2a_2$;$a_2a_2a_2$.

这是依下标从小到大的顺序,且后面元素的下标大于或等于前面元素的下标写出的.若将依次 3 个元素的下标分别加上 0,1,2,即成为:

$$a_1a_2a_3;a_1a_2a_4;a_1a_3a_4;a_2a_3a_4.$$

显然这为从 4 个相异元素 a_1, a_2, a_3, a_4 中,每次取出 3 个元素不允许重复的所有组合,这表明 $H_2^3 = C_4^3 = 4$.

例 2.3.10 从 a_1, a_2, a_3 3 个元素里,每次取出 2 个元素的重复组合,有下列 6 种:a_1a_1;a_1a_2;a_1a_3;a_2a_2;a_2a_3;a_3a_3.

同样将每一种组合中 2 个元素的下标依次加上 0,1,即成为:

$$a_1a_2;a_1a_3;a_1a_4;a_2a_3;a_2a_4;a_3a_4.$$

这恰为从 a_1, a_2, a_3, a_4 4 个元素中每次取出 2 个元素不允许重复的所有组合.故有 $H_3^2 = C_4^2 = 6$.

若 m 个元 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的所有 n 元重复组合已全部写出,它们分别是:

$$\begin{array}{l} a_1a_1a_1\cdots a_1a_1; \\ a_1a_1a_1\cdots a_1a_2; \\ a_1a_1a_1\cdots a_1a_3; \\ \quad\vdots \\ a_{m-1}a_ma_m\cdots a_ma_m; \\ a_ma_ma_m\cdots a_ma_m. \end{array} \tag{2.3.2}$$

将上面每一种组合的 n 个元素的下标依次加上 $0,1,2,\cdots,n-2,n-1$,即成为:

$$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n;$$

$$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_{n+1};$$

$$a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_{n+2};$$

$$\vdots$$

$$a_{m-1}a_{m+1}a_{m-2}\cdots a_{m+n-2}a_{m+n-1};$$

$$a_ma_{m+1}a_{m+2}\cdots a_{m+n-2}a_{m+n-1}.$$

其中最小下标仍是 1,最大下标是 $m-n-1$,即元素增加了 $n-1$个.

我们注意到(2.3.2)中的组合是依下标由小到大的顺序排列的,且所有的组合都是从第一种组合:$a_1a_1a_1\cdots a_1a_1$ 起由末位回溯到首位,依次更换一个元素得到的,这样它既没有遗漏又没有重复.从而将每一种组合中 n 个元素的下标依次加上 0,1,⋯,$n-1$ 之后,即得到了 $m+n-1$ 个相异元素的 n 元不重复组合,于是有

$$H_m^n = C_{m-n-1}^n.$$

这就是计算 m 个相异元素的 n 元重复组合数的公式.

例 2.3.11 求$(a+b)^n$ 的展开式中有多少项.

解 因为展开式里每一项各元素(即 a,b)的指数和等于 n,所以展开式是关于给定元素的 n 次齐次多项式.而当某一元素的指数为0 时,表示这个元素未取出;当某一元素的指数大于 1 时,表示这个元素重复使用,而与元素排列的顺序无关.这样,求$(a+b)^n$ 展开式中的项数,即相当于求从 a、b 两个元素里,每次取出 n 个元素的重复组合数,从而为

$$H_2^n = C_{2-n-1}^n = C_{n+1}^n = n+1.$$

例2.3.12 $(a+b+c)^n$ 展开式中的项数为

$$H_3^n = C_{3+n-1}^n = C_{n-2}^n = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

例2.3.13 $(a+b+c+d)^n$ 展开式中的项数为

$$H_4^n = C_{4+n-1}^n = C_{n+3}^n = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}.$$

§2.4 二项式定理

定理2.4.1 设 n 为任何自然数,则有

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^k a^{n-k} b^k + \cdots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

证明 对 n 作归纳法即可得证.

我们可以将 $(a+b)^n$ 展开式中各项的系数列表如下($n=0,1,2,\cdots$):

$(a+b)^0$ …………………… 1

$(a+b)^1$ ………………… 1　1

$(a+b)^2$ ……………… 1　2　1

$(a+b)^3$ …………… 1　3　3　1

$(a+b)^4$ ………… 1　4　6　4　1

$(a+b)^5$ ……… 1　5　10　10　5　1

$(a+b)^6$ …… 1　6　15　20　15　6　1

……

类似这样的表,早在我国宋朝数学家杨辉所著的《详解九章算法》一书中就已经出现了.书中指出这个方法出于贾宪(公元 11 世纪,宋朝数学家)所著《黄帝九章算经细草》.欧洲称上面所得表为"帕斯卡三角形",但法国数学家帕斯卡生活的年代为公元 17 世纪,显然要比我国迟 500 年左右.故我们称此三角形为"杨辉三角形"或"贾宪三角形"是更为合理的.

杨辉还特别指出,表里除了第一行的 1 及两边的 1 之外,每一个数都等于它肩上两个数之和.事实上,这正反映了组合的性质

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}.$$

例2.4.1 求 $(a-b)^n$ 的展开式.

解　$(a-b)^n =$

$$[a+(-b)]^n=$$
$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}(-b)^k=$$
$$a^n-C_n^1a^{n-1}b+\cdots+(-1)^k a^{n-k}b^k+\cdots+(-1)^n b^n$$

一般地，在二项式定理$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$中第$k+1$项为$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$称为二项展开式的通项.需要注意的是，这里“通项”并不是第k项，而是第$k+1$项.

例 2.4.2 求$x(1-x)^4+x^2(1+2x)^8+x^3(1+3x)^{12}$中$x^4$的系数.

解 $x(1-x)^4$的展开式中x^4的系数为$(1-x)^4$的展开式中x^3的系数，即$C_4^3(-1)^3=-4$；

$x^2(1+2x)^8$的展开式中x^4的系数为$(1+2x)^8$的展开式中x^2的系数，即$C_8^2\cdot 2^2=112$；

$x^3(1+3x)^{12}$的展开式中x^4的系数为$(1+3x)^{12}$的展开式中x的系数，即$C_{12}^1\cdot 3=36$.

故所求系数为$(-4)+112+36=144$.

例 2.4.3 求$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$的展开式中所有的有理项.

解 通项为

$$T_{k+1}=C_{20}^k(\sqrt[3]{x})^{20}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=$$
$$C_{20}^k(-1)^k\cdot x^{\frac{20-k}{3}}\cdot x^{-\frac{k}{2}}=(-1)^k\cdot C_{20}^k\cdot x^{\frac{40-5k}{6}},$$

而题目要求为有理项，故须使x的幂指数$\frac{40-5k}{6}=p$.

$k=\frac{40-6p}{5}=8-p-\frac{p}{5}$.

由于k是满足条件:$0\leqslant k\leqslant 20$的整数，得$p=5,0,-5,-10$.其对应的k值分别为:$k=2,8,14,20$.从而所求的有理项分别为:
$190\cdot x^5,C_{20}^8,C_{20}^{14}\cdot x^{-5},x^{-10}$.

例 2.4.4 求证$(a+b)^{2n}$的展开式中的最大系数是一个偶数.

证明 因为 $2n$ 是一个偶数,故展开式中的最大系数是 $C_{2n}^{\frac{2n}{2}}=C_{2n}^{n}$. 而

$$C_{2n}^{n}=\frac{(2n)!}{n!\ (2n-n)!}=\frac{(2n)!}{n!\ n!}=\frac{2n\cdot(2n-1)!}{n\cdot(n-1)!\ n!}=2\cdot\frac{(2n-1)!}{n!\ \cdot[(2n-1)-n]!}=2\cdot C_{2n-1}^{n}$$

显然组合数 C_{2n-1}^{n}是一个整数,故所求的最大系数 C_{2n}^{n}是偶数.

例 2.4.5 求证$55^{55}+15$能被 14 整除.

证明 由 $55^{55}+15=(56-1)^{55}+15$,而

$$(56-1)^{55}+15=$$
$$C_{55}^{0}56^{55}-C_{55}^{1}56^{54}+C_{55}^{2}56^{53}-C_{55}^{3}56^{52}+\cdots+C_{55}^{54}56-1+15=$$
$$56^{55}-C_{55}^{1}56^{54}+\cdots+C_{55}^{54}56+14$$

上式中,前面 55 项都含有 56 这个因数,因此其和能被 56 整除,从而也能被 14 整除. 而最后一项恰为 14,故 $55^{55}+15$ 能被 14 整除.

例 2.4.6 若今天是星期一,问10^{90}天后是星期几?

解 问 $10^{90}=100^{45}=(98+2)^{45}=(14\times7+2)^{45}$.

由二项式定理知,上面展开式中前 45 项都含有 7 的因数,故其和能被 7 整除. 于是问 10^{90}天后是星期几应由展开式的最后一项来确定.

因 $2^{45}=(2^3)^{15}=8^{15}=(7+1)^{15}$,

故 10^{90}天后应为星期二.

例 2.4.7 证明(1) 当 n 为奇数时

$$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}, \tag{2.4.1}$$

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n}=2^{n-1}, \tag{2.4.2}$$

(2) 当 n 为偶数时

$$C_n^0+C_n^2-C_n^4+\cdots+C_n^{n}=2^{n-1}, \tag{2.4.3}$$

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}. \tag{2.4.4}$$

证明 在二项式定理$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k$中，令$a=b=1$，则得

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\cdots+C_n^{n-1}+C_n^n=2^n \tag{2.4.5}$$

再令$a=1,b=-1$，则得

$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^nC_n^n=0 \tag{2.4.6}$$

将(2.4.5)式与(2.4.6)两式相加，则当n为奇数时，有

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^{n-1}=2^{n-1}$，此即(2.4.1).

而当n为偶数时，有$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots+C_n^n=2^{n-1}$，此即(2.4.3).

若再用(2.4.5)减去(2.4.6)式，则分n为奇数、偶数两种情况，即得(2.4.2)、(2.4.4).

例 2.4.8 试证

$$2C_n^1+4C_n^2+6C_n^3+\cdots+2nC_n^n=n\cdot 2^n.$$

证明

因为$k\cdot C_n^k=k\cdot\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}=\dfrac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}=$

$\dfrac{n\cdot(n-1)!}{(k-1)!\,[((n-1)-(k-1)!)]!}=n\cdot C_{n-1}^{k-1}$

所以$2C_n^1+4C_n^2+6C_n^3+\cdots+2nC_n^n=$

$2(C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n)=$

$2(n\cdot C_{n-1}^0+n\cdot C_{n-1}^1+n\cdot C_{n-1}^2+\cdots+n\cdot C_{n-1}^{n-1})=$

$2n(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=$

$2n\cdot 2^{n-1}=n\cdot 2^n.$

最后，我们将C_n^k的定义扩展到n为任何实数，k为任何整数的情形：

(1) n为任何实数，k为正整数

$C_n^k=0 \qquad k>n;$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n;$$

(2) n 为任意实数,k 为负整数 $C_n^k = 0$;

(3) $C_n^0 = 1$.

例 2.4.9 证明对于任何实数 n,只要整数 k 非 0,都有

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}.$$

证明 k 为正整数时,不妨设 $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} =$$

$$\frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)(n-2)\cdots[(n-1)-(k-1)+1]}{(k-1)!} =$$

$$\frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

而当 k 为负整数时,显然 $k-1$ 也为负整数,故有 $C_n^k = 0$,且 $C_{n-1}^{k-1} = 0$,从而也有

$$C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}.$$

例 2.4.10 对于任何实数 n 和整数 k,都有

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

证明 k 为正整数时

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} +$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot k}{(k-1)!} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{k!} +$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\cdot k}{k!} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)[(n-k)+k]}{k!} =$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=C_n^k,$$

k 为 0 时,由定义即知下式显然成立

$$C_n^0 = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^{-1}.$$

k 为负整数时,$k-1$ 也为负整数,此时

$$C_n^k=0, C_{n-1}^k=0, C_{n-1}^{k-1}=0,$$

故也有
$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}.$$

例 2.4.11 证明对于任何非负整数 n 和非负整数 k,下列公式成立:

$$C_0^k + C_1^k + C_2^k + \cdots + C_{n-1}^k + C_n^k = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (2.4.7)$$

证明 对 n 作归纳法

$n=0$ 时,即 $C_0^k=C_1^{k+1}$. 此时若 $k=0$,两边都是 1;若 $k\geqslant 1$,两边都是 0,故当 $n=0$ 时(2.4.7)式成立.

下面假设 $n=s$ 时(2.4.7)成立,即有

$$C_0^k + C_1^k + C_2^k + \cdots + C_{s-1}^k + C_s^k = C_{s+1}^{k+1}$$

从而 $n=s+1$ 时,

$$C_0^k + C_1^k + C_2^k + \cdots + C_{s-1}^k + C_s^k + C_{s+1}^k =$$
$$C_{s+1}^{k+1} + C_{s+1}^k = C_{s+2}^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

归纳法完成.

习题二

1.钟表厂为了使闹钟的式样新颖,设计了 4 种形状不同的外壳,确定了 3 种钟面颜色以及 3 种数字形体,问闹钟共有几种不同的式样?

2.某座山峰南坡有山路 3 条,北坡也有山路 3 条,若:

(1) 从南坡上山,再由北坡下山,则从上山到下山有几种不同的走法?

(2) 任意选择上山的路线,但下山时要求不走原来上山的路线,问有几种不同的走法?

(3) 任意选择上、下山的路线,问从上山到下山有几种不同的

走法?

3. 写出从 a、b、c、d、e 5 个元素里每次取出 1 个、2 个、3 个元素的所有排列.

4. 写出从 a、b、c、d、e、f 6 个元素里每次取出 3 个,并且限定 a 为首位的所有排列.

5. 分别写出从 a、b、c、d、e 5 个元素里,每次取出 1 个、2 个、3 个、4 个、5 个元素的所有组合.

6. 一条铁路共有 48 个车站,其中大站 6 个,快车只停靠大站,慢车每站都停,则

(1) 铁路局应为这条线路准备多少种车票?

(2) 共有多少种不同的票价?

7. 按 5 粒不同弹子的排列顺序制造弹子锁,问能生产多少种不同的锁?

8. 上午有 4 节课,一个教师要上 3 个不同班级的课,若不能连上 3 节,问课程表有几种排法?

9. 从 $m+1$ 个元素里,每次取出 n 个元素进行排列,则

(1) 有多少种排列?

(2) 其中不含某一元素的排列有多少种?

(3) 其中一定含某一元素的排列有多少种?

(4) 从上面的结果,可以得出怎样的关系式?

10. 有 20 个球队,分为三组,其中两个组都是 7 个队,而另一个组是 6 个队,各进行单循环赛,然后各组冠军进行单循环赛. 问:

(1) 共比赛多少场次?

(2) 这种比赛办法比全部 20 个队都采用单循环制要减少几场次?

11. 有 3 种不同土质的试验地,计划种植五种不同的作物,问有几种不同的分配方法?

12. 号码锁的 3 个拨盘上都有 0 到 9 这 10 个数字. 只有当这 3 个拨盘上的数字组成某一个"三位数"(这里 000 也算一个"三位数")

时,锁才能打开.问共可为这种号码锁设定多少种开锁号码?

13.电话机号码用7位数字,问最多能装多少部电话机?

14.6封信投入3个邮筒,问有多少种不同的投法?

15.有多少种方法从52张一副的扑克牌中抽出两张,使得

(1) 第一张是A,第二张是K;

(2) 第一张是A,第二张不是K;

(3) 第一张是红桃,第二张是方块;

(4) 第一张是红桃,第二张是A;

(5) 两张中至少有一张是A.

16.计算各位数字为1、2、3、4或5的四位偶数的个数.

17.求整数x满足下列条件.

(1) $1\,000 < x \leqslant 5\,400$;

(2) x的各位数字均不相同;

(3) 数字2和7不出现.

问这样的整数x有多少个?

18.6位先生和6位女士坐在一张圆桌前,问有多少种方法使男女相间?

19.从有10位先生和12位女士的俱乐部中选出一个四人委员会.要求至少包含两位女士,问有多少种方法产生这个委员会?如果此时王先生和夫人拒绝同时在委员会服务,问又有多少种形成委员会的方法?

20.用二项式定理证明:$3^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k\cdot 2^k$.

21.用二项式定理证明:$2^n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^k\cdot 3^{n-k}$.

22.用二项式定理证明

(1) $x^{2n+1}+a^{2n+1}$能被$x+a$整除;

(2) $(n+1)^n-1$能被n^2整除;

(3) $3^{2n+2}-8n-9$是64的倍数;

(4) $3^{4n+2}+5^{2n+1}$是14的倍数.

第三章　容斥原理

§3.1　引言

有些计数问题,需要采用一些特殊的方法计算,我们来看下面两个例子.

例 3.1.1　求1～200间不能被 3 整除的整数的个数.

解　要直接计算 1～200 间不能被 3 整除的整数的个数比较麻烦,但要计算这 200 个数中有多少个数能被 3 整除则很容易.

容易算出,这 200 个数中能被 3 整除的数的个数为 $\left[\frac{200}{3}\right]=66$ 从而不能被 3 整除的整数的个数为 $200-\left[\frac{200}{3}\right]=134$.

例 3.1.2　求不超过200的正整数中是 5 的倍数或是 6 的倍数的数的数目.

解　不超过 200 的正整数中是 5 的倍数的数有 $\left[\frac{200}{5}\right]=40$ 个;不超过 200 的正整数中是 6 的倍数的数有 $\left[\frac{200}{6}\right]=33$ 个;但不超过 200 的正整数中 30 的倍数的数有 $\left[\frac{200}{30}\right]=6$ 个,而在上面所得的 40 个 5 的倍数与 33 个 6 的倍数中,都分别含有这 6 个 30 的倍数,故所求的数目为:

$$\left[\frac{200}{5}\right]+\left[\frac{200}{6}\right]-\left[\frac{200}{30}\right]=67.$$

容斥原理研究的主要是若干有限集合的交、并或差的计数问题,

在讨论过程中要用到集合的基数(或称为集合的势),我们仅就有限集合加以介绍.

两个集合 A 和 B,若它们的元素之间能建立起一一对应的关系,则说这两个集合 A 与 B 的基数相同,并记为 $A \sim B$.

对有限集而言,一个集合的基数就是它所含有元素的个数.若 A 是有限集,则用 $|A|$ 来表示 A 中元素的个数.显然,对于空集合 $\varnothing$ 来说,有 $|\varnothing| = 0$.

设 A_1、A_2 均为有限集 S 的子集(此时显然 A_1 与 A_2 均为有限集),则有

(1) $|A_1 \cup A_2| \leqslant |A_1| + |A_2|$,且式中等号成立当且仅当 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$;

(2) $|A_1 \cap A_2| \leqslant \min\{|A_1|, |A_2|\}$,且式中等号成立当且仅当 $A_1 \subseteq A_2$ 或 $A_2 \subseteq A_1$;

(3) $|A_1 - A_2| \geqslant |A_1| - |A_2|$,式中等号成立当且仅当 $A_2 \subseteq A_1$.

以上三个式子的证明,由定义即可得到.

最后,我们说明函数 $f(x) = [x]$ 的意义.首先 $f(x) = [x]$ 的定义域为全体实数,而其值域则为全体整数.其次,对于任意实数 x,我们规定 $[x]$ 等于不超过 x 的最大整数.

例如 $\left[\frac{200}{3}\right] = 66, [0] = 0,$

$[-4.7] = -5, [-0.01] = -1, [6.999] = 6$ 等等.

故可将 $f[x] = [x]$ 称为"取整函数".

例 3.1.3 设

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$B = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$,

$C = \{1,3,5,7,9\}$,

则 $|A| = 10, |B| = 10, |C| = 5$,

而 $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,14,16,18,20\}$,

$A\cup C=A, B\cup C=A\cup B,$

所以 $|A\cup B|=15<20=|A|+|B|,$

$|A\cup C|=10<15=|A|+|C|,$

$|B\cup C|=15=|B|+|C|.$

又 $A\cap B=\{2,4,6,8,10\},$

$A\cap C=C, B\cap C=\varnothing,$

所以 $|A\cap B|=5<\min\{|A|,|B|\}=10,$

$|A\cap C|=5=\min\{|A|,|C|\}=5,$

$|B\cap C|=0<\min\{|B|,|C|\}=5.$

类似可得

$|A-B|=5>|A|-|B|=0,$

$|A-C|=5=|A|-|C|=10-5,$

$|B-C|=10>|B|-|C|=10-5=5.$

§3.2 容斥原理

定理 3.2.1 设 A 是有限集 S 的一个子集，则 A 中元素个数等于 S 中元素个数减去 S 中不在 A 内的元素个数，即

$$|A|=|S|-|\overline{A}|.$$

例 3.2.1 设 $S=\{1,2,3,\cdots,1\,000\}$，$A=\{x\in S\mid 6$ 不整除 $x\}$，

则 $\overline{A}=\{x\in S\mid 6$ 整除 $x\}$，且 $|S|=1\,000$，$|\overline{A}|=\left[\frac{1\,000}{6}\right]=166$，于是

$$|A|=|S|-|\overline{A}|=1\,000-166=834$$

即从 1 到 1 000 这 1 000 个自然数中，不是 6 的倍数的数有 834 个.

定理 3.2.2 设 A、B 均是有限集 S 的子集，则有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

定理 3.2.2 给出了这样一个事实，即：具有性质 A 或 B 的元素个数等于具有性质 A 的元素个数与具有性质 B 的元素个数的和减去同时具有性质 A 和 B 的元素个数.

例 3.2.2 求从1到 500 的整数中能被 3 或 5 整除的数的数目.

解 令 A_1 为 1 到 500 的整数中被 3 整除的数的集合，A_2 为 1 到 500 的整数中被 5 整除的数的集合.则：

$$|A_1| = \left[\frac{500}{3}\right] = 166, |A_2| = \left[\frac{500}{5}\right] = 100,$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{500}{15}\right] = 33$$

从而由定理 3.2.2，被 3 或 5 整除的数的个数为：

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 166 + 100 - 33 = 233.$$

定理 3.2.3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是有限集 S 的子集，则有：

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.$$

证明 由定理 3.2.2，对 n 作归纳法即得.

特别，当 $n=3$ 时，我们有：

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

当 $n=4$ 时，有

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \\ & |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + \\ & |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + \\ & |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

例 3.2.3 某学校开设三门外语：英语、日语和法语，要求每一个学生至少选修一门.已知选修英、日、法三门外语的人数分别为

180、172 和 122；同时选修英语和日语的有 46 人，同时选修英语和法语的有 28 人，同时选修日语和法语的有 19 人；同时选修英、日、法三门外语的有 7 人. 问该校共有多少名学生？

解 记 A_1、A_2、A_3 分别表示选修英、日、法语学生的集合，则依题意有：

$|A_1|=180,\ |A_2|=172,\ |A_3|=122;$

$|A_1\cap A_2|=46,\ |A_1\cap A_3|=28,\ |A_2\cap A_3|=19;$

$|A_1\cap A_2\cap A_3|=7.$

由题设每一名学生至少选修一门外语，故该校学生总数为：

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|=$$
$$180+172+122-46-28-19+7=388.$$

定理 3.2.4 设 S 为一个有限集，$P_1,P_2,\cdots,P_n$ 为 n 个性质. 令 A_i 为 S 中具有性质 $P_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的元素所成之集，则 S 中不具有 $P_1,P_2,\cdots,P_n$ 中任一性质的元素数为：

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=$$
$$|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-$$
$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+$$
$$(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|.$$

例 3.2.4 设 n 为任何一大于 1 的自然数，将小于 n 且与 n 互质的正整数的个数记作 $\varphi(n)$（称 $\varphi(n)$ 为欧拉函数）. 试求 $\varphi(n)$ 的表达式.

解 将 n 分解成质因数连乘积为

$$n=P_1^{k_1}P_2^{k_2}\cdots P_m^{k_m}$$

其中 $P_1,P_2,\cdots,P_m$ 为 n 的所有互异质因数，$k_1,k_2,\cdots,k_m$ 均为正整数.

又记：$S=\{1,2,\cdots,n\}$，

$A_i=\{x\in S\,|\,P_i\text{ 整除 }x\},\ i=1,2,\cdots,m.$

显然，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ 即为S 中所有与 n 不互质的数的集合，而 $\varphi(n) = |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}|$.

又 $|A_i| = \frac{n}{P_i}, i = 1, 2, \cdots, m$；

$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{P_i P_j}, 1 \leqslant i < j \leqslant m$；

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{P_i P_j P_k}, 1 \leqslant i < j < k \leqslant m$；

……

$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = \frac{n}{P_1 P_2 \cdots P_m}$,

于是，依定理 3.2.4

$$
\begin{aligned}
\varphi(n) = & |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_m}| = \\
& |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \\
& n - \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{P_i} + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant m}^{n} \frac{n}{P_i P_j} - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant m}^{n} \frac{n}{P_i P_j P_k} + \\
& \cdots + (-1)^m \frac{n}{P_1 P_2 \cdots P_m} = \\
& n\left(1 - \frac{1}{P_1}\right)\left(1 - \frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{P_m}\right) = \\
& P_1^{k_1} P_2^{k_2} \cdots P_m^{k_m} \cdot \left(1 - \frac{1}{P_1}\right)\left(1 - \frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{P_m}\right) = \\
& P_1^{k_1 - 1} P_2^{k_2 - 1} \cdots P_m^{k_m - 1}(P_1 - 1)(P_2 - 1)\cdots(P_m - 1).
\end{aligned}
$$

例 3.2.5 对于 $n = 30$，因 $30 = 2 \times 3 \times 5$，这里 $P_1 = 2, P_2 = 3, P_3 = 5, k_1 = k_2 = k_3 = 1$，故

$$
\begin{aligned}
\varphi(30) = & 30 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \\
& (2-1)(3-1)(5-1) = 8.
\end{aligned}
$$

不难得出这 8 个数分别为：1、7、11、13、17、19、23、29.

又如对于 $n = 40 = 2^3 \times 5$，有

$$\varphi(40) = 40 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 2^2 \cdot (2-1)(5-1) = 16.$$

这 16 个数为:1、3、7、9、11、13、17、19、21、23、27、29、31、33、37、39.

§3.3 应用举例

例 3.3.1 求出 a,b,c,d,e,f 6 个字母的全排列中不允许 abd 与 ce 情形出现的排列种数.

解 记 A_1 为 abd 作为一个元素出现的排列的集合;A_2 为 ce 作为一个元素出现的排列的集合;则 $A_1\cap A_2$ 为同时出现 abd 与 ce 的排列的集合.于是

$|A_1|=4!$, $|A_2|=5!$, $|A_1\cap A_2|=3!$,从而所求的排列种数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}|=6!\ -4!\ -5!\ +3!\ =582.$$

例 3.3.2 求不超过120的素数的个数.

解 因 $11^2=121$,故不超过 120 的合数必然是 2、3、5、7 的倍数,且不超过 120 的合数的因子不可能都超过 11.

记 $S=\{1,2,\cdots,120\}$

$A_i=\{x\in S\mid i \text{ 整除 } x\}, i=2,3,5,7.$ 则

$$|A_2|=\left\lfloor\frac{120}{2}\right\rfloor=60,\quad |A_3|=\left\lfloor\frac{120}{3}\right\rfloor=40,$$

$$|A_5|=\left\lfloor\frac{120}{5}\right\rfloor=24,\quad |A_7|=\left\lfloor\frac{120}{7}\right\rfloor=17,$$

$$|A_2\cap A_3|=\left\lfloor\frac{120}{6}\right\rfloor=20,\quad |A_2\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{10}\right\rfloor=12,$$

$$|A_2\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{14}\right\rfloor=8,\quad |A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{15}\right\rfloor=8,$$

$$|A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{21}\right\rfloor=5,\quad |A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{35}\right\rfloor=3,$$

$$|A_2\cap A_3\cap A_5|=\left\lfloor\frac{120}{30}\right\rfloor=4,\quad |A_2\cap A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{42}\right\rfloor=2,$$

$$|A_2\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{70}\right\rfloor=1,\quad |A_3\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{120}{105}\right\rfloor=1,$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| = \left[\frac{120}{210}\right] = 0.$$

从而所求非 2、3、5、7 的倍数的数的个数为：

$$|\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_5} \cap \overline{A_7}| =$$

$$|S| - |A_2| - |A_3| - |A_5| - |A_7| + |A_2 \cap A_3| +$$

$$|A_2 \cap A_5| + |A_2 \cap A_7| + |A_3 \cap A_5| + |A_3 \cap A_7| +$$

$$|A_5 \cap A_7| - |A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3 \cap A_7| -$$

$$|A_2 \cap A_5 \cap A_7| - |A_3 \cap A_5 \cap A_7| +$$

$$|A_2 \cap A_3 \cap A_5 \cap A_7| =$$

$$120 - 60 - 40 - 24 - 17 + 20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3 -$$

$$4 - 2 - 1 - 1 + 0 = 27.$$

需注意的是，27 这个数并非就是不超过 120 的素数的个数，因为它已排除了 2、3、5、7 这四个素数，而又含有数 1 这个非素数，从而所求不超过 120 的素数个数应为

$$27 + 4 - 1 = 30.$$

例 3.3.3 从100到 999 共 900 个三位数中，相邻数字不相等的三位数共有多少个？

解 设 $S = \{100, 101, 102, \cdots, 999\}$，且将 S 中每一个数均表示为$\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}$，即 a 为百位数码，b 为十位数码，c 为个位数码. 再设 $A_1 = \{x \in S \mid b = c\}$，$A_2 = \{x \in S \mid a = b\}$；则 $|S| = 900$，$|A_1| = 9 \times 10 = 90$，$|A_2| = 9 \times 10 = 90$，$|A_1 \cap A_2| = 9$，从而所求的三位数的个数为：

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| =$$

$$900 - 90 - 90 + 9 = 729.$$

例 3.3.4 n 个元素依次给以标号1，2，…，n. 在这 n 个元素的全排列中，求每个元素都不在自己原来位置上的排列种数.

解 记 A_i 为数 i 在第 i 个位置上的全体排列的集合，$i = 1, 2, \cdots, n$.

由于数字 i 不动，知

$|A_i|=(n-1)!, i=1,2,\cdots,n.$

同理可知

$|A_i\cap A_j|=(n-2)!, i,j=1,2,\cdots,n, i\neq j$

……

从而每个元素都不在原来位置上的排列种数为：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|=$$

$$n!-C_n^1\cdot(n-1)!+C_n^2\cdot(n-2)!-C_n^3\cdot(n-3)!+$$

$$\cdots+(-1)^i\cdot C_n^i(n-i)!+\cdots+(-1)^n\cdot C_n^n\cdot 1!=$$

$$n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right).$$

n 个有序的元素应有 $n!$ 个不同的排列，如若一个排列使得所有的元素都不在原来的位置上，则称这个排列为错排(也可以叫做重排或更列).

我们用 D_n 表示集合 $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 的错排数，则由上面讨论有：

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}\right)$$

由此公式可算得

$$D_5=5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)=44$$

$$D_6=6!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)=265$$

根据 e^{-1}的表达式

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}+\cdots=$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}.$$

于是$\left|e^{-1}-\frac{1}{n!}D_n\right|<\frac{1}{(n+1)!}$.

当 $n\geqslant 7$ 时，$\frac{1}{(n+1)!}<10^{-4}$，故用 e^{-1}近似代替$\frac{1}{n!}D_n$ 的精确度

还是相当高的. 而$\frac{D_n}{n!}$恰为集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$的错排总数与总排列数之比. 或者说$\frac{D_n}{n!}$表示我们任意挑选一个 $S=\{1,2,\cdots,n\}$的排列,其结果为错排的概率. 例如,10 位同学各自拿出一本与众不同的书互相交换,则没有一位同学得到他自己的书的概率是$\frac{D_{10}}{10!}$,它十分接近于 e^{-1}. 这个概率即使对于 100 万个同学也几乎不变. 从而得知 e^{-1}与$\frac{D_n}{n!}$是非常好的近似.

错排数有一些有趣的性质,如

$$D_n = (n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),\ n=3,4,\cdots \qquad (3.3.1)$$

这个公式是线性递归关系的一个例子,关于递归关系我们将在下一章详细讨论. 因为已知 $D_1=0, D_2=1$,故利用式(3.3.1)即可对任何正整数 n 来计算出 D_n. 例如

$$D_3 = 2(D_1+D_2) = 2,$$
$$D_4 = 3(D_2+D_3) = 9,$$
$$D_5 = 4(D_3+D_4) = 44,$$
$$D_6 = 5(D_4+D_5) = 265.$$

下面我们用组合论的方法证明(3.3.1)式.

设 $n\geqslant 3$,考虑 $S=\{1,2,\cdots,n\}$的所有错排,我们可以按照整数 $2,3,\cdots,n$ 中哪一个占据排列的首位置,把这些错排分为 $n-1$ 个互不相交的组,且显然每一个组中都含有相同数目的错排. 于是 $D_n=(n-1)d_n$,其中 d_n 是 $2,3,\cdots,n$ 中任一个(例如 2)位于首位的错排数. 这样的错排具有形式 $2i_2i_3\cdots i_n$. 其中 $i_2i_3\cdots i_n$ 是 $1,3,4,\cdots,n$ 的一个排列,且 $i_3\neq 3, i_4\neq 4,\cdots,i_n\neq n$. 这 d_n 个错排又可按照$i_2=1$ 或 $i_2\neq 1$,进一步划分为两个子组:

其中一组中的错排都具有 $2\ 1\ i_3\cdots\ i_n$ 的形式,其中 $i_3i_4\cdots i_n$ 是 $3,4,\cdots,n$ 的一个错排;

另一组中的错排都具有 $2i_2i_3\cdots i_n$ 的形式,其中 $i_2i_3\cdots i_n$ 是

$1,3,4,\cdots,n$的一个错排，$i_2\neq1$.

显然第一组中错排个数为D_{n-2}，第二组中错排个数为D_{n-1}，这就证明了

$$D_n=(n-1)d_n=(n-1)(D_{n-1}+D_{n-2}),n=3,4,\cdots,n.$$

例3.3.5 在数码1,2,3,4,5,6,7,8,9的全排列中，求：

(1) 偶数都在原来自己的位置上，而奇数都不在原来位置上的错排数目；

(2) 奇数都在原来自己的位置上，而偶数都不在原来位置上的错排数目；

(3) 求所有奇数都不在原位置的错排数；

(4) 求所有偶数都不在原位置的错排数.

解 (1) 本题实际上即是元素1,3,5,7,9的错排问题，故所求错排数为$D_5=44$.

(2) 本题为4个元素2,4,6,8的错排问题，故所求错排数为$D_4=9$.

(3) 用A_i表示i排在原来位置上的所有排列所成集合，$i=1,2,\cdots,9$.则由容斥原理，所求的错排数为：

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_5}\cap\overline{A_7}\cap\overline{A_9}|=$$
$$9!\ -|A_1\cup A_3\cup A_5\cup A_7\cup A_9|=$$
$$9!\ -(C_5^1\cdot8!\ -C_5^2\cdot7!\ +C_5^3\cdot6!\ -C_5^4\cdot5!\ +C_5^5\cdot4!)=$$
$$362\ 880-(201\ 600-50\ 400+7\ 200-600+24)=205\ 056$$

(4) A_i的意义同上，所求的错排数为

$$|\overline{A_2}\cap\overline{A_4}\cap\overline{A_6}\cap\overline{A_8}|=$$
$$9!\ -|A_2\cup A_4\cup A_6\cup A_8|=$$
$$9!\ -(C_4^1\cdot8!\ -C_4^2\cdot7!\ +C_4^3\cdot6!\ -C_4^4\cdot5!)=$$
$$362\ 880-(161\ 280-30\ 240+2\ 880-120)=229\ 080$$

例3.3.6 求8个字母a,b,c,d,e,f,g,h的全部排列中，只有4个元素不在原来位置上的排列种数(原来位置指字母的自然顺

序).

解 题目要求 8 个字母中只有 4 个字母不在原来的位置上,这样必然有其余的 4 个字母保持不动,这相当于对某 4 个固定字母的错排问题.故其数目为

$$4!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}\right)=9.$$

但题目中要求只有 4 个元素不在原来的位置上,显然任取 4 个元素的方法共 C_8^4 种.从而所求的排列种数为:

$$9\cdot C_8^4=9\cdot 70=630 \text{ 个}.$$

下面我们给出另一种排列的计数问题,其中存在一定的相对的位置限制.

设给定正整数 n,我们来计算 $1,2,\cdots,n$ 的满足下面条件的排列数 Q_n,其中每一个排列中不能出现 $12,23,\cdots,(n-1)n$ 的形式.

当 $n=1$,只有一个排列,故 $Q_1=1$;

当 $n=2$ 时,两个排列中,只有排列 21 是允许的排列,故 $Q_2=1$;

当 $n=3$ 时,允许的排列为 213,321,132,故 $Q_3=3$;

当 $n=4$ 时,允许的排列为 4 132,4 321,4 213,3 214,3 241,3 142,2 431,2 413,2 143,1 324,1 432,故 $Q_4=11$;

于是,我们知道 $Q_1=1,Q_2=1,Q_3=3,Q_4=11$,一般地,我们有下面的结论:

定理 3.3.1 对于任意 $n\geqslant 1$,有 $Q_n=$
$n!-C_{n-1}^1\cdot(n-1)!+C_{n-1}^2\cdot(n-2)!-C_{n-1}^3\cdot(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\cdot 1!$.

证明 记 $S=\{1,2,\cdots,n\}$,对于 $i=1,2,\cdots,n-1$,令 P_j 表示"在 S 的一个排列中出现了 $j(j+1)$ 这一情况"的性质,$j=1,2,\cdots,n-1$,并用集合 A_j 表示具有性质 P_j 的排列,则有

$$Q_n=|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}|.$$

下面用容斥原理计算 Q_n.

显然,对于 A_1 中的任一排列,由 A_1 的定义可知,它必出现 12 的情形,故可将其看作是 $n-1$ 个符号 $12,3,4,\cdots,n$ 的一个排列,故必有 $|A_1|=(n-1)!$,同理,对每一个 j,都有

$$|A_j|=(n-1)!,\quad j=1,2,\cdots,n-1.$$

又对于 $A_1\cap A_2$ 中每一排列,均含有 123 连排在一起的情形,故可视为 $123,4,5,\cdots,n$ 这 $n-2$ 个符号的一个排列,即有

$$|A_1\cap A_2|=(n-2)!.$$

而对于 $A_1\cap A_3$ 中每一排列,均含有 12 与 34 这种情形出现,故可视为 $12,34,5,6,\cdots,n$ 这 $n-2$ 个符号的一个排列,也有

$$|A_1\cap A_3|=(n-2)!,$$

从而对于任意 $i\neq j$,有 $|A_i\cap A_j|=(n-2)!$,类似地,我们有:

$$|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_{j_k}|=(n-k)!,$$

其中 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,为 $1,2,\cdots,n-1$ 中任取的 k 个元素,即为 $1,2,3,\cdots,n-1$ 中任取 k 个数的一个组合.从而应用容斥原理,可得

$$\begin{aligned}Q_n=&|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}|=\\&n!-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1}|=\\&n!-C_{n-1}^1\cdot(n-1)!+C_{n-1}^2\cdot(n-2)!-\\&C_{n-1}^3\cdot(n-3)!+\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\cdot 1!.\end{aligned}$$

最后再给出本定理的一个应用问题.

例 3.3.7 现有8名学生每天晚上都要跑步.他们 8 个人排成一列,故除第一个学生外,每个人前面都有一个学生.有同学提议说,每天都看见同一个人在他前面显得过于单调,故第二天他们即决定改变位置,使得没有一个学生的前面的人与第一天相同.问共有多少种方法改变位置?

解 将这 8 名学生分别编上号码,$1,2,3,\cdots,8$.则显然本题即为上面定理中 $n=8$ 的情形.于是

$$\begin{aligned}D_8=&8!-C_7^1\cdot 7!+C_7^2\cdot 6!-C_7^3\cdot 5!+C_7^4\cdot 4!-\\&C_7^5\cdot 3!+C_7^6\cdot 2!-C_7^7\cdot 1!=\end{aligned}$$

$40\,320-35\,280+15\,120-4\,200+840-126+14-1=$
$16\,687$.

习题三

1. 在不大于 10^6 的正整数中,即不是完全平方数,也不是完全立方数的数有多少个?

2. 在小于 500 的正整数中,有多少个不能被 3、5、7 整除的数?有多少个能被 3 整除,但不能被 5 或 7 整除的数? 有多少个能被 5 整除,但不能被 3 或 7 整除的数? 有多少个能被 7 整除,但不能被 3 或 5 整除的数?

3. 求出 1 到 1 000 间不能被 4、5 或 6 整除的整数的个数.

4. 求出 1 到 1 000 间不能被 3、5、7 或 13 整除的整数的个数.

5. 某班有 25 名学生,其中有 16 人学英语,12 人学日语,6 人兼学日语和英语,5 人兼学英语和德语,有 2 人兼学这 3 门外语,学德语的 8 个人均兼学英语或日语.问该班不学这三门外语的有多少人?

6. 确定数码 1、2、3、4、5、6、7、8 满足下列条件的排列种数:

(1) 其中恰有一个偶数在它的自然位置上;

(2) 其中恰有一个整数在它的自然位置上;

(3) 其中恰有一个奇数在它的自然位置上;

(4) 其中恰有两个整数不在它的自然位置上;

(5) 其中恰有 k 个整数在它的自然位置上,$k=1,2,\cdots,8$.

7. 在一个宴会上,7 位先生存放了他们的帽子.问在下列情况下,有多少种方法拿回这些帽子?

(1) 没有一位先生拿到自己的帽子;

(2) 至少有一位先生拿到自己的帽子;

(3) 至少有两位先生拿到自己的帽子;

(4) 至少有两位先生未能拿到自己的帽子.

8.10 位同学各自拿出一本与其他同学互不相同的书互相交换,问有多少种分配方法使每位同学都得到一本由别人提供的书?

9. 将 5 个不同的球放进 4 个不同的盒子里，使每一个盒子中至少放人一个球，问共有多少种不同的放球方案？

10. 求大于 100 而小于等于 1 000 的正整数中，与 1 000 互素的整数的个数.

第四章　递归关系

§4.1　斐波那契(Fibonacci)数列

13世纪初,意大利数学家斐波那契研究了著名的"兔子繁殖数目"问题.

一对小兔,一雌一雄,于年初放入围栏.小兔第一个月长大,第二个月就繁殖出一雌一雄一对小兔.以后,凡长大的一对大兔每月都生出一雌一雄一对小兔,且小兔也依同样的规律,第一个月长大成熟,第二个月开始每月生一雌一雄一对小兔.问一年后,栏内有多少对兔子?

将小雌兔记为 a,小雄兔记为 b;大雌兔由 a 长大记为 A,大雄兔由 b 长大记为 B,于是可得各月兔子对数为:

第一个月	(a,b)	1对
第二个月	(A,B)	1对
第三个月	$(A,B)+(a,b)$	2对
第四个月	$(A,B)+(a,b)+(A,B)=$ $2(A,B)+(a,b)$	3对
第五个月	$2(A,B)+2(a,b)+(A,B)=$ $3(A,B)+2(a,b)$	5对
第六个月	$3(A,B)+3(a,b)+2(A,B)=$ $5(A,B)+3(a,b)$	8对
第七个月	$5(A,B)+5(a,b)+3(A,B)=$ $8(A,B)+5(a,b)$	13对

……

由上面所列数据,不难发现如下规律:

当月兔对数目=上月兔对数目+上月能生小兔的大兔对数=

上月兔对数目+前月兔对数目.

若记满 n 个月时兔子对数为 F_n,则有

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},$$

其中 $n=2,3,\cdots$,且 $F_1=F_2=1$.

我们称这个数列为斐波那契数列,而将递推关系 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ 称为斐波那契递推关系,称其满足的条件:$F_1=F_2=1$ 为初值条件.

由以上计算,可得斐波那契数列为

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,\cdots$$

从而可知,一年后共有 $F_{13}=233$ 对兔子在栏内.

若规定:$U_0=U_1=1$, $U_n=U_{n-1}+U_{n-2}$, $n=2,3,4,\cdots$,则也可得到上面同样的数列,不过这里的第 n 项为 U_{n-1},而上面的第 n 项为 F_n,我们同样称数列 U_n 为斐波那契数列,且称每一个 U_n 为斐波那契数.

斐波那契数有许多有趣的性质:

性质 1 $\sum_{i=0}^{n}U_i=U_{n+2}-1$.

证明 $\sum_{i=0}^{n}U_i=\sum_{i=0}^{n}(U_{i+2}-U_{i+1})=$

$\sum_{i=0}^{n}U_{i+2}-\sum_{i=0}^{n}U_{i-1}=$

$U_{n+2}+\sum_{i=0}^{n-1}U_{i+2}-\sum_{i=1}^{n}U_{i-1}-U_1=$

$U_{n+2}-U_1=U_{n+2}-1$.

性质 2 $\sum_{i=0}^{n}U_{2i}=U_{2n+1}$.

证明 $\sum_{i=0}^{n}U_{2i}=U_0+\sum_{i=1}^{n}(U_{2i-1}+U_{2i-2})=$

$$U_0+\sum_{i=1}^{n}U_{2i-1}+\sum_{i=1}^{n}U_{2i-2}=$$
$$1+\sum_{i=0}^{2n-1}U_i=$$
$$1+U_{(2n-1)+2}-1=U_{2n+1}.$$

性质 3 $\sum_{i=0}^{n}U_i^2=U_n\cdot U_{n-1}$.

证明 对 n 作归纳法.

$n=0$ 时， $U_0^2=1^2=1\cdot 1=U_0\cdot U_1$;

$n=1$ 时， $U_0^2+U_1^2=1^2+1^2=U_1\cdot U_2$;

$n=2$ 时， $U_0^2+U_1^2+U_2^2=U_1\cdot U_2+U_2^2=$
$U_2(U_1+U_2)=U_2\cdot U_3$;

假设 $n=k$ 时，$\sum_{i=0}^{k}U_i^2=U_k\cdot U_{k+1}$，

则 $n=k+1$ 时，

$$\sum_{i=0}^{k+1}U_i^2=\sum_{i=0}^{k}U_i^2+U_{k+1}^2=U_k\cdot U_{k+1}+U_{k+1}^2=$$
$$U_{k-1}(U_k+U_{k+1})=$$
$$U_{k-1}\cdot U_{k+2}.$$

这就证明了对一切非负整数 n，有

$$\sum_{i=0}^{n}U_i^2=U_n\cdot U_{n+1}.$$

下面我们考虑如何得到计算斐波那契数的公式，并在这个过程中体会解递归关系的一种技巧.

先不考虑初值：$U_0=U_1=1$，而只考虑递推关系 $U_n=U_{n-1}+U_{n-2}$，$n=2,3,4,\cdots$. 解这种递推关系的一种方法是考虑函数：

$F(n)=q^n$，其中 q 为非零常数.

若 $F(n)=q^n$ 满足递归关系 $U_n=U_{n-1}+U_{n-2}$，则 $q^n=q^{n-1}+q^{n-2}$，$n=2,3,4,\cdots$，从而必有 $q^{n-2}(q^2-q-1)=0$，$n=2,3,4,\cdots$.

因 $q\neq 0$，故 $F(n)=q^n$ 是上面递归关系的解，当且仅当 q 是二

次方程$x^2-x-1=0$的根：$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$和$q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 于是知

$$F(n)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ 和 } F(n)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

都是所求递归关系的解.

又因为递归关系$U_n=U_{n-1}+U_{n-2}$是线性的(即没有一个项的幂超过一次)，又是齐次的(即没有常数项)，故有

$$F(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

对任何常数C_1和C_2都是所求递归关系的解. 于是对于斐波那契数，我们有初值$U_0=U_1=1$，故只要取

$$F(0)=C_1+C_2=1, F(1)=C_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+C_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1,$$

则可求出：

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}, C_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

从而我们可得如下的定理。

定理 4.1.1 斐波那契数为

$$U_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

例 4.1.1 一个人爬n个台阶的楼梯，如果只允许一步跨一个或两个台阶，问有多少种不同的上楼方式？

解 记n个台阶的不同上楼的方式数为a_n，则显然有$a_1=1$，$a_2=2, a_3=3, a_4=5$，且一般地来说，n个台阶上楼的方式可分为两类：一类是第一步跨一个台阶，从而剩下$n-1$个阶，故这一类的上楼方式数为a_{n-1}；另一类是第一步跨两个台阶，从而剩下$n-2$个阶，故这一类的上楼方式数为a_{n-2}. 从而得到递归关系：

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geqslant 3.$$

若规定 $a_0 = 1$，则这个递归关系对 $n=2$ 也成立，从而恰为斐波那契数列，由定理 4.1.1 知

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

例 4.1.2 求数列 $b_0, b_1, b_2, \cdots$，它满足递归关系：$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ 及初值 $b_0 = 2, b_1 = -1$.

解 由前面的讨论，知

$$b_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

由 $2 = b_0 = C_1 + C_2$,

$$-1 = b_1 = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

解得 $C_1 = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}, C_2 = \dfrac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}$，于是所求数列为

$$b_n = \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

例 4.1.3 杨辉三角形中，从左下到右上（这里最后一行取第一个数，倒数第二行取第二个数，倒数第三行取第三个数，…，直到取不到数为止）的斜线上二项式系数之和是斐波那契数. 即对于 $n \geqslant 0$，第 n 个斐波那契数 U_n 满足：$U_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots + C_{n-k}^k$，其中 $k = \left[\frac{n}{2}\right]$.

证明 对 $n \geqslant 0$，定义

$a_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots + C_{n-k}^k$，其中 $k = \left[\frac{n}{2}\right]$. 再约定：当 $s > m$ 时，$C_m^s = 0$，则有

$a_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots + C_{n-k}^k + \cdots + C_0^n$,

为证 $a_n = U_n, n = 0, 1, 2, \cdots$，只需证明 a_n 与 U_n 满足相同的递归关系：$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$；且它们有相同的初值

$U_0=U_1=1$ 与 $a_0=a_1=1$,即可.

由 a_n 的表达式,显然有

$a_0=C_0^0=1, a_1=C_1^0+C_0^1=1$,故 a_n 与 U_n 有相同的初值.

又对 $n\geqslant 2$,有

$$
\begin{aligned}
&a_{n-1}+a_{n-2}= \\
&\quad C_{n-1}^0+C_{n-2}^1+C_{n-3}^2+\cdots+C_1^{n-2}+C_0^{n-1}+ \\
&\quad C_{n-2}^0+C_{n-3}^1+\cdots+C_1^{n-3}+C_0^{n-2}= \\
&\quad C_n^0+C_{n-1}^1+C_{n-2}^2+\cdots+C_1^{n-1}+C_0^n=a_n.
\end{aligned}
$$

这证明了 a_n 与 U_n 满足相同的递归关系,从而 $a_n=U_n$, $n=0,1,2,\cdots$.

§4.2 常系数线性齐次递归关系

一般地来说,解决一切递归关系的通用法则是不存在的(或者说现在还没有发现).但是存在某些特殊类型的递归问题,对于它们,我们可以找出一般解法,常系数线性齐次递归关系就属于这样一类.

定义 4.2.1 形如

$$f(n)=a_1\cdot f(n-1)+a_2\cdot f(n-2)+\cdots+a_k\cdot f(n-k) \tag{4.2.1}$$

其中 $n=k,k-1,\cdots$ 的递归关系称为常系数线性齐次递归关系.这里 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 均为常数,且 $a_k\neq 0$.

因 $f(m)$ 由前 k 个值所决定,故也称(4.2.1)式为 k 阶的线性齐次递归关系.

例 4.2.1 $g(n)=5[g(n-1)]^2-3g(n-2), n=2,3,\cdots$,不是线性递归关系;

又 $H(n)=3H(n-1)+4, n=1,2,\cdots$,不是齐次递归关系.

且 $f(n)=(n+3)f(n-1)+2f(n-1), n=2,3,\cdots$,也不是常系数递归关系.

(4.2.1)式也可写成如下的等价形式：

$f(n)-a_1\cdot f(n-1)-a_2\cdot f(n-2)-\cdots-a_k\cdot f(n-k)=0$

其中 $n=k,k+1,\cdots$. (4.2.2)

如果能找到 $h(n)$是(4.2.2)的解，即 $h(n)=f(n)$, $n=1,2,\cdots$,则数列 $h(0),h(1),h(2),\cdots$,被 k 个初始值$h(0),h(1),h(2),\cdots,h(k-1)$唯一确定.

我们称方程 $x^k-a_1x^{k-1}-a_2x^{k-2}-\cdots-a_{k-1}x-a_k=0$ 为(4.2.1)式或(4.2.2)式的特征方程. 特征方程的 k 个根 $q_1,q_2,\cdots,q_k$ 称为(4.2.1)式或(4.2.2)式的特征根. 特征根可以是复数，也不一定互异. 但因 $a_k\neq 0$,故所有特征根都非零.

例 4.2.2 递归关系 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$的特征方程为：$x^2-x-1=0$. 它的两个特征根为

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\text{和 } q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

定理 4.2.1 设 q 是非零复数，则 $h(n)=q^n$ 是递归关系(4.2.1)式的解，当且仅当 q 是它的特征根.

证明 $h(n)=q^n$ 是(4.2.1)式的解，当且仅当对所有的 $n\geqslant k$，有

$$q^n=a_1q^{n-1}-a_2q^{n-2}+\cdots+a_kq^{n-k},$$

即

$$q^n-a_1q^{n-1}-a_2q^{n-2}-\cdots-a_kq^{n-k}=0.$$

因 $q\neq 0$,故当 $n\geqslant k$ 时. 上式等价于

$$q^k-a_1q^{k-1}-a_2q^{k-2}-\cdots-a_{k-1}q-a_k=0.$$

故得，$h(n)=q^n$ 是递归关系(4.2.1)的解，当且仅当 q 是它的特征根.

注 (1) $h_1(n),h_2(n),\cdots,h_t(n)$是(4.2.1)式的 t 个解，且 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ 是 t 个常数，则易知：

$H(n)=C_1h_1(n)+C_2h_2(n)+\cdots+C_th_t(n)$也是(4.2.1)的一个解.

(2) 特别，若 $q_1,q_2,\cdots,q_k$,是 k 个特征根，$C_1,C_2,\cdots,C_k$

是k个常数,则

$H(n)=C_1q_1^n+C_2q_2^n+\cdots+C_kq_k^n$是(4.2.1)式的一个解.

(3) 一个具有k个任意常数$C_1,C_2,\cdots,C_k$的表达式$H(n)$,如果满足以下两个条件:对于$C_1,C_2,\cdots,C_n$的任意选择,$H(n)$都是(4.2.1)式的解;对于(4.2.1)式的任一个解,都可以通过对$C_1,C_2,\cdots,C_k$的适当选择而获得.则称$H(n)$是(4.2.1)式的一个通解.

定理 4.2.2 设递归关系(4.2.1)式的特征根$q_1,q_2,\cdots,q_k$两两互异,则$H(n)=C_1q_1^n+C_2q_1^n+\cdots+C_kq_k^n$是(4.2.1)式的通解,其中$C_1,C_2,\cdots,C_k$为任意常数.

证明 $H(n)$是(4.2.1)式的解是显然的.故只需证明对(4.2.1)式的任一解$h(n)$都可通过适当选择常数$C_1,C_2,\cdots,C_k$之值而值

$$H(n)=h(n),n=0,1,2,\cdots,\text{即可}.$$

因为$H(n)$和$h(n)$都满足同样的递归关系,故仅需使前k个值彼此相等即可,为此令

$h(0)=H(0)=C_1+C_2+\cdots+C_k$,

$h(1)=H(1)=C_1q_1+C_2q_2+\cdots+C_kq_k$,

……

$h(k-1)=H(k-1)=C_1q_1^{k-1}+C_2q_2^{k-1}+\cdots+C_kq_k^{k-1}$,

这是一个关于k个未知数$C_1,C_2,\cdots,C_k$的k个方程的线性方程组,其系数行列式为:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \cdots & q_k^{k-1} \end{vmatrix}$$

因为$q_i\neq q_j(i\neq j)$,所以$D\neq 0$.从而方程组有唯一解$C_1,C_2,\cdots,C_k$,定理即得证明.

例 4.2.3 求递归关系

$H(n)=2H(n-1)+H(n-2)-2H(n-3), n=3,4,\cdots$,满足初值:$H(0)=1, H(1)=2, H(2)=0$ 的解.

解 该递归关系的特征方程为:

$$x^3-2x^2-x+2=0,$$

其特征根为 $1,-1,2$,于是

$H(n)=C_1\cdot 1^n+C_2\cdot(-1)^n-C_3\cdot 2^n$ 即是该递归关系的通解,选择常数 C_1, C_2, C_3,使其满足初始条件:

$$H(0)=C_1+C_2+C_3=1$$

$$H(1)=C_1-C_2+2C_3=2$$

$$H(2)=C_1+C_2+4C_3=0.$$

解之得:$C_1=2, C_2=-\dfrac{2}{3}, C_3=-\dfrac{1}{3}$,

于是所求的解为

$$h(n)=2-\frac{2}{3}(-1)^n-\frac{1}{3}\cdot 2^n.$$

例 4.2.4 由 3 个字母 a、b、c 构成长度为 n 的词在一个通信通道中传送.要限制传送的词中没有两个 a 相继出现,试确定通讯通道中允许的词数 $h(n)$.

解 对每一个给定的数 n,将 $h(n)$ 看成数列 $h(1), h(2), h(3),\cdots,h(n),\cdots$中的一项,来求数列的解.

由简单计算可得:

$h(1)=3$,即有 3 个词:a, b, c;

$h(2)=9$,即有 8 个词:$ab, ac, bb, bc, ba, ca, cb, cc$.

当 $n\geqslant 3$ 时,可分两种情况:

(1)若该词的第一个字母是 b 或 c,则该词可用 $h(n-1)$ 种方法补全,此时共有 $2h(n-1)$ 个词;

(2)若该词的第一个字母是 a,则第二个字母必为 b 或 c,从而可由 $h(n-2)$ 种方法将其补全.此时共有 $2h(n-2)$,于是有递归关

系：

$$h(n)=2h(n-1)+2h(n-2),n=3,4,\cdots$$

其特征方程为 $x^2-2x-2=0$，求出特征根为：$q_1=1+\sqrt{3}$，$q_2=1-\sqrt{3}$，于是通解为：

$$H(n)=C_1(1+\sqrt{3})^n+C_2(1-\sqrt{3})^n,n=3,4,\cdots.$$

再由初始条件，可得

$$C_1(1+\sqrt{3})+C_2(1-\sqrt{3})=3,$$

$$C_2(1+\sqrt{3})^2+C_2(1-\sqrt{3})^2=8,$$

解之有

$$C_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\quad C_2=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

从而

$$h(n)=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n,$$

$n=1,2,3,\cdots.$

上面讨论了特征方程无重根时的情况，而当特征方程有重根时，我们可作如下讨论：

考虑递归关系

$$H(n)=a_1H(n-1)-a_2H(n-2)+\cdots+a_kH(n-k)$$

其中 $a_k\neq 0,n=k,k+1,k-2,\cdots,$ (4.2.3)

其特征方程为：

$$p(x)=x^k-a_1x^{k-1}-\cdots-a_{k-1}x-a_k=0,$$

且 $p(x)$ 的不同特征根分别为 $q_1,q_2,\cdots,q_t$，其重复数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_t(m_1+m_2+\cdots-m_t=k)$，则有如下的定理.

定理 4.2.3 若 q 是递归关系(4.2.3)的特征方程的 m 重根，则下面 m 个表达式：

$$H(n)=q^n,H(n)=nq^n,\cdots,H(n)=n^{m-1}q^n$$

都是递归关系(4.2.3)的解.

证明 对 m 作归纳法.

$m=1$ 时，由定理 4.2.1 知结论正确.

$m=2$ 时，(4.2.3)式特征方程为

$p(x)=(x-q)^2\varphi(x)$，且$(x-q,\varphi(x))=1$

再令

$$p_n(x)=x^{n-k}p(x)=$$

$$x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots-a_{k-1}x^{n-k+1}-a_kx^{n-k},$$

又因 $q\neq0$，知 q 仍是 $p_n(x)$的二重根，从而 q 必是 $p_n(x)$的导数 $p'_n(x)=nx^{n-1}-a_1(n-1)x^{n-2}-\cdots-a_k(n-k)x^{n-k-1}$的根，显然还是 $xp'_n(x)=nx^n-a_1(n-1)x^{n-1}-\cdots-a_k(n-k)x^{n-k}$的根，这表明

$$nq^n=a_1(n-1)q^{n-1}+a_2(n-2)q^{n-2}+\cdots+a_k(n-k)q^{n-k}$$

亦为递归关系(4.2.3)式的解.于是：

$H(n)=q^n$，$H(n)=nq^n$ 都是(4.2.3)式的解，即定理对 $m=2$ 的情形成立；

归纳假设 $m=s$ 时定理成立，

则当 $m=s+1$ 时，有

$$p(x)=(x-q)^{s+1}\varphi(x),\text{且}((x-q),\varphi(x))=1.$$

同样令 $p_n(x)=x^{n-k}p(x)$，对 $p_n(x)$再次进行下面的运算：

记 $xp'(x)=U_1(x)$，则 q 是$U_1(x)$的 s 重根，再记 $xU'_1(x)=U_2(x)$，则 q 是$U_2(x)$的 $s-1$ 重根，……，最后记 $xU'_{s-1}(x)=U_s(x)$，则 q 是 $U_s(x)$的 1 重根(即单根).

由运算过程易知

$$xU_s(x)=n^sx^n-a_1(n-1)^sx^{n-1}-\cdots-a_k(n-k)x^{n-k},$$

这表明

$$n^sq^n=a_1(n-1)^sx^{n-1}+\cdots+a_k(n-k)x^{n-k},$$

归纳法完成.

定理 4.2.4 在(4.2.3)式及其下面所做的假设条件下，有如下结论：(4.2.3)式的通解为

$$H(n)=H_1(n)+H_2(n)+\cdots+H_t(n),$$

其中 $$H_j(n)=(C_{j1}+nC_{j2}+n^2C_{j3}+\cdots+n^{m_j-1}C_{jm_j})q_j^n,$$

$j=1,2,\cdots,t$.

提示 显然,对于每一个 $j=1,2,\cdots,t$ 及 $C_{j1},C_{j2},\cdots,C_{jm_j}$ 的任意选择,所给表达式均是递归关系(4.2.3)式的解.从而要证上式为(4.2.3)式的通解,只需证明相应的系数行列式(分别取 $n=0,1,2,\cdots,k-1$ 即得关于 C_{jk} 的线性方程组)非零即可.具体证明从略.

例 4.2.5 解满足初值条件 $H(0)=1,H(1)=0,H(2)=1,H(3)=2$的递归关系

$$H(n)=-H(n-1)+3H(n-2)+5H(n-3)+2H(n-4),n=4,5,6,\cdots.$$

解 此递归关系的特征方程为

$$x^4+x^3-3x^2-5x-2=0,$$

其特征根为 -1(三重),2(单根).

从而得通解

$$H(n)=(C_1+nC_2+n^2C_3)(-1)^n+2^nC_4.$$

将初值条件代入,即得

$$\begin{cases}C_1+C_4=1,\\-C_1-C_2-C_3+2C_4=0,\\C_1+2C_2+4C_3+4C_4=1,\\-C_1-3C_2-9C_3+8C_4=2.\end{cases}$$

解之得

$C_1=\frac{7}{9},C_2=-\frac{3}{9},C_3=0,C_4=\frac{2}{9}$,

于是所求解

$$H(n)=\left(\frac{7}{9}-\frac{3}{9}n\right)(-1)^n+\frac{2}{9}\cdot 2^n.$$

例 4.2.6 求解 $U_n=U_{n-1}-U_{n-2}$,且 $U_1=1,U_0=0$.

解 特征方程 $x^2-x+1=0$，得特征根 $q_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$，$q_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$，这是一对共轭复根.由定理4.2.2知所求通解为：

$$U_n=C_1\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n,$$

再代入初值条件可得，$C_1=\frac{-i}{\sqrt{3}}$，$C_2=\frac{i}{\sqrt{3}}$，

于是得

$$U_n=\frac{-i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n+\frac{i}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n.$$

本例中得到的通解 $U_n=C_1q_1^n+C_2q_2^n$，式中 q_1,q_2,C_1,C_2 均为复数，我们可用以下方法将其化为实数形式.

事实上，由欧拉公式 $q_1=\rho\cdot e^{i\theta}$，$q_2=\rho\cdot e^{-i\theta}$，于是

$$\begin{aligned}U_n&=C_1\rho^n\cdot e^{in\theta}+C_2\rho^n\cdot e^{-in\theta}=\\&C_1\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)+C_2\rho^n(\cos n\theta-i\sin n\theta)=\\&\rho^n(C_1+C_2)\cos n\theta+i\rho^n(C_1-C_2)\sin n\theta.\end{aligned}$$

又可设 C_1、C_2 为共轭复数，$C_1=\frac{A-iB}{2}$，$C_2=\frac{A+iB}{2}$，则 $C_1-C_2=A$，$C_1-C_2=-iB$，这样可得 $U_n=A\rho^n\cos n\theta+B\rho^n\sin n\theta$.

这相当于对单重复根 q_1、q_2 分别有特解 $\rho^n\cos n\theta$ 和 $\rho^n\sin n\theta$，而 A、B 是两个任意的实常数.

对于本例，$q_1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=1\cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$，$q_2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1\cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$，

（即 $\rho=1,\theta=\frac{\pi}{3}$）.

从而 $U_n=A\cdot1^n\cdot\cos\frac{n\pi}{3}+B\cdot1^n\cdot\sin\frac{n\pi}{3}$，

代入初始条件 $U_1=1,U_0=0$，

解得 $A=0,B=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故　$U_n=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{n\pi}{3}$.

本例体现的方法具有一定的普遍意义,即:如果特征方程具有一对共轭单根,则可取特解为 $\rho^n\cos n\theta$ 和 $\rho^n\sin n\theta$(其中共轭根为 $q_1=\rho\cdot e^{i\theta}$ 和 $q_2=\rho\cdot e^{-i\theta}$);如果特征根为共轭二重根,则可取 4 个特解为 $\rho^n\cos n\theta,\rho^n\sin n\theta,n\rho^n\cos n\theta,n\rho^n\sin n\theta$;如果特征根为共轭 k 重根,则可取 $2k$ 个特解为 $\rho^n\cos n\theta,\rho^n\sin n\theta,n\rho^n\cos n\theta,n\rho^n\sin n\theta,\cdots,n^{k-1}\rho^n\cos n\theta$,和 $n^{k-1}\rho^n\sin n\theta$.

§4.3　迭代和归纳

前面我们讨论了解常系数线性齐次递归关系的一般方法,但在实际应用这种方法解决实际问题时,常遇到下面的困难:首先在于求特征方程时要求解一个代数方程,其次在解初值问题又要解一个线性方程组,当递归关系的阶 k 很大时,往往是很困难的事.另外,当递归关系不是常系数线性齐次的至今还没有普遍适用的方法.本节我们通过典型问题的举例来说明解递归关系的两条一般途径,迭代和归纳,在实际问题中,它们有相当的适用范围.

例 4.3.1　印度北部佛教圣地拿勒斯神庙一铜板上插有三根宝石针.传说梵天神在其中一根针上串放着 64 片大小不同的金片,大的在下,小的在上.一僧侣移动金片,每次移动一片,且中间过程只允许大片在下,小片在上(金片必须放在某一根宝石针上).天神说,当 64 片金片全都从第一根针串放于另一根针上时,世界将在大爆炸中消灭,天神将来拯救人类.

解　不妨设三根宝石针分别为 A、B、C,且更一般地将金片数目设为 n,先来建立把 n 个金片从 A 移到 C 的移动次数的递归关系.

对于 $n=2$.用 $A(i)$表示 A 针上有第 i 片金片,$A(i,j)$表示 A 针上有第 i、j 片金片,$i,j=1,2$.并记 $A(0)$表示 A 针上无金片.则

可将具体移动步骤表示如下：

$[A(1,2),B(0),C(0)]\to[A(2),B(1),C(0)]$

$\to[A(0),B(1),C(2)]\to[A(0),B(0),C(1,2)]$

即 $n=2$ 时，共移动 3 次即可.

再看 $n=3$ 的情形.

$[A(1,2,3),B(0),C(0)]\to[A(2,3),B(0),C(1)]$

$\to[A(3),B(2),C(1)]\to[A(3),B(1,2),C(0)]$

$\to[A(0),B(1,2),C(3)]\to[A(1),B(2),C(3)]$

$\to[A(1),B(0),C(2,3)]\to[A(0),B(0),C(1,2,3)]$

即 $n=3$ 时，共需 7 次.

$n=3$ 时的移动步骤可表示为：

$[A(1,2,3),B(0),C(0)]\xrightarrow{3次}[A(3),B(1,2),C(0)]$

$\xrightarrow{1次}[A(0),B(1,2),C(3)]\xrightarrow{3次}[A(0),B(0),C(1,2,3)]$.

如果 A 针上有 $n-1$ 片金片将其移到 C 针上的次数为 U_{n-1}，则 A 针上有 n 片金片移动 C 针上的次数可如下得出：

$[A(1,2,\cdots,n),B(0),C(0)]$

$\xrightarrow{U_{n-1}次}[A(n),B(1,2,\cdots,n-1),C(0)]$

$\xrightarrow{1次}[A(0),B(1,2,\cdots,n-1),C(n)]$

$\xrightarrow{U_{n-1}次}[A(0),B(0),C(1,2,\cdots,n)]$.

若将 n 个金片 A 移到 C 的次数记为 U_n 次，由上面可知：可先把前 $n-1$ 片从 A 移到 B，这需 U_{n-1} 次；再将第 n 片从 A 移到 C，这只需一次；最后再将 B 上的 $n-1$ 片移到 C，这也需 U_{n-1} 次（每次均要保持小片在上而大片在下），从而可有如下递归关系：

$$U_n=U_{n-1}+1+U_{n-1}=2U_{n-1}+1,$$

满足初始条件：$U_1=1$，$U_2=3$.

显然，$U_n=2U_{n-1}+1$ 是二阶线性非齐次递归关系，非齐次项为 0 次多项式，可用如下的方法将其化为线性齐次递归关系：

由 $U_n=2U_{n-1}+1 \Rightarrow U_{n-1}=2U_{n-2}+1$

将上面两式相减,即得

$$U_n=3U_{n-1}-2U_{n-2},$$

其特征方程为:$x^2-3x+2=0$,得特征根 $q_1=2,q_2=1$,于是得

$$U_n=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 1^n=2^nC_1+C_2.$$

利用初始条件可得 $C_1=1,C_2=-1$,从而得所求递归关系的解为:$U_n=2^n-1$.

再回到本题中的神话上,将 64 片金片按要求从 A 针移到 C 针,要移动 $2^{64}-1$ 次.如果按僧侣每秒移动一次来计算,也需要 5845 亿年完成这件工作,故即使是完全相信这个传说的人,也大可不必担心世界爆炸的问题了.

例 4.3.2 设 $a_{n+1}=2a_n+(n+1),a_1=2$,求 a_n 的一般表达式.

解 由 $a_{n+1}=2a_n+(n+1)$,得 $a_n=2a_{n-1}+n$,

两式相减可得 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}+1$,

即又有

$a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}+1$ 与 $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+1$,

再将两式相减,即得 $a_{n+1}=4a_n-5a_{n-1}+2a_{n-2}$.

特征方程 $x^3-4x^2+5x-2=0$,特征根:$q_1=2,q_2=q_3=1$,于是可知

$$a_n=2^nC_1+C_2+nC_3.$$

再由题目所给条件,$a_1=2$,并由题设求出 $a_2=6,a_3=15$,可定出 $C_1=\frac{5}{2},C_2=-2,C_3=-1$,故 $a_n=5\cdot 2^{n-1}-n-2$.

例 4.3.3 解递归关系

$H(n)=H(n-1)+n^3,n=1,2,\cdots$.初值 $H(0)=0$.

解 迭代这个关系,可以发现

$H(n)=H(n-1)+n^3=$

$\quad H(n-2)+(n-1)^3+n^3=$

$$H(n-3)+(n-2)^3+(n-1)^3+n^3=\cdots=$$
$$H(1)+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=$$
$$H(0)+1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3=$$
$$1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3,$$

即当 $n\geqslant1$ 时,$H(n)$是前 n 个正整数的立方和.我们可用下面的方法来找到一个简单的求和公式:利用递归关系,计算 $H(n)$的前 n 个值,再利用前 n 个正整数的求和公式,可得:

$H(0)=0=0^2$,

$H(1)=H(0)+1^3=0+1=1^2$,

$H(2)=H(1)+2^3=1+8=9=(1+2)^2$,

$H(3)=H(2)+3^3=9+27=36=(1+2+3)^2$,

$H(4)=H(3)+4^3=36+64=100=(1+2+3+4)^2$,

$H(5)=H(4)+5^3=100+125=225=(1+2+3+4+5)^2$.

由此可猜测 $H(n)$适合公式:

$$H(n)=(1+2+\cdots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

对此,可用归纳法证明如下:

$$H(n+1)=H(n)+(n+1)^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2+(n+1)^3=$$
$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4)=$$
$$\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2.$$

例 4.3.4 给定 n 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,它们的乘积有多少种不同的方法形成?

解 设 $f(n)$表示形成 n 个数之积的方法数,$n=1,2,3,\cdots$.

先计算一下 $n=1,2,3$ 的情形.

显然,$n=1$ 时,$f(1)=1$;

$n=2$ 时,$f(2)=2$ 即 a_1a_2 和 a_2a_1;

$n=3$ 时,$f(3)=12$ 有如下 12 种方法:

$(a_1a_2)a_3, a_1(a_2a_3), (a_1a_3)a_2, a_1(a_3a_2),$
$(a_2a_1)a_3, a_2(a_1a_3), (a_2a_3)a_1, a_2(a_3a_1),$
$(a_3a_1)a_2, a_3(a_1a_2), (a_3a_2)a_1, a_3(a_2a_1).$

一般地,我们可用如下方法获得 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的积,在 $n-1$ 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的乘积中插入 a_n,这有如下几种添加方法:

(1) 在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的乘积之前乘以 a_n;

(2) 在 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的乘积之后乘以 a_n;

(3) 将 a_n 从任何一边乘以获得 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 之乘积的 $n-2$ 个乘法中任何一个因子.

对于 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的乘积的每一种形成方法,显然(1)及(2)的插入法各有一种,(3)的插入法有 $4(n-2)$ 种,这可从下例看出:

取 $n=6$, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的一种取定的乘法形成方式为 $(a_1a_2)((a_3a_4)a_5)$,共有 $6-2=4$ 次乘法,任取其中的一个乘法,如 a_1a_2,则有 4 种不同的方法将 a_6 添加到这个乘法中去,即为:

$$(a_6a_1)a_2, (a_1a_6)a_2,$$
$$a_1(a_6a_2), a_1(a_2a_6).$$

又如考虑 a_3a_4 与 a_5 的乘法(这里将 a_3a_4 看作整体),也有 4 种不同的方法将 a_6 添加到这个乘法中去,即为:

$$(a_6(a_3a_4))a_5, ((a_3a_4)a_6)a_5,$$
$$(a_3a_4)(a_6a_5), (a_3a_4)(a_5a_6);$$

这些添加方法都不改变原来的两个因子之间的先后关系.因此,我们可知 $f(n)$ 满足递归关系:

$$f(n)=(2+4(n-2))f(n-1)=(4n-6)f(n-1),$$
$$n=2,3,4,\cdots.$$

再根据初始条件 $f(1)=1$,我们用迭代法求递归关系 $f(n)=(4n-6)f(n-1)$ 的解.

$$f(n)=(4n-6)f(n-1)=$$

$$
\begin{aligned}
&(4n-6)(4n-10)f(n-2)=\\
&(4n-6)(4n-10)(4n-14)f(n-3)=\\
&\cdots\cdots=\\
&(4n-6)(4n-10)(4n-14)\cdots 6\cdot 2\cdot f(1)=\\
&2^{n-1}(2n-3)(2n-5)(2n-7)\cdots 3\cdot 1=\\
&\frac{2^{n-1}(2n-2)!}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}=\\
&\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}=(n-1)!\ C_{2n-2}^{n-1}.
\end{aligned}
$$

例 4.3.5 平面上有 n 条直线，任两条不平行，任三条不交于一个点. 问共有多少个交点?

解 设这 n 条线符合要求的交点有 $h(n)$ 个.

显然，$h(2)=1$ 为初始条件.

从这 n 条线出发，再添上第 $n+1$ 条直线，则新添的线与前 n 条中每条交且仅交于一点，所以有：

$$
\begin{aligned}
h(n+1)=h(n)+n=&\\
&h(n-1)+(n-1)+n=\cdots=\\
&h(2)+2+3+\cdots+(n-1)+n=\\
&1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\\
&\frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}
$$

例 4.3.6 平面上有 n 条直线，任两条不平行，任三条不交于一个点. 问这样 n 条直线分割平面成多少个不同的区域?

解 设 n 条直线所成的区域数为 $g(n)$.

显然，$g(1)=2$，$g(2)=4$.

当添加第 $n+1$ 条直线时，相当于在这第 $n+1$ 条直线上添加 n 个点，把此直线分成 $n-1$ 个线段以及 2 条射线，它们恰为新区域的边界，故有递归关系：

$$g(n+1)=g(n)+n+1,$$

从而 $\qquad g(n+1)=g(n)+n+1=$

$$
\begin{aligned}
&g(n-1)+n+(n+1)=\cdots=\\
&g(1)+2+3+\cdots+n+(n+1)=\\
&2+2+3+\cdots+n+(n+1)=\\
&1+\frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}
$$

§4.4 差分表

本节主要利用差分表将一个数 x 的正整数次幂表示为广义的二项式系数之和,并进而利用这种关系来计算前 n 个正整数的 k 次幂之和.

考虑定义在整数集(也可以为实数集)上的一个函数 P,为说明方便,不妨先考虑:$P(x)=2x^2+3x+1$ 为多项式函数.

对于 $x=0,1,2,\cdots$,计算 $P(x)$之值,并把它们排为一行,称之为第 0 行.在下面的一行,即第 1 行,列出相邻两项之差,$\Delta P(x)=P(x+1)-P(x)$定义一个新函数 ΔP,则当 $x=0,1,2,\cdots$时,所得之差即为 $\Delta P(x)$之值,我们称 ΔP 为P 的一阶差分.

接下来,在第二行中列出第一行中相邻两项之差,并定义 $\Delta^2P(x)=\Delta P(x+1)-\Delta P(x)$,称为 P 的二阶差分,如此继续添加各行于表中,即可得到如下的表:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 6 & & 15 & & 28 & & 45 & & 66 & & 91 & & \cdots\\
& 5 & & 9 & & 13 & & 17 & & 21 & & 25 & & \cdots & \\
& & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & 4 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
& & & & & & \cdots & & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

称上面的表为函数 P 的差分表.

定义 4.4.1 给定函数 P,记 $\Delta^0P=P$,且对 $k\geqslant1$,定义 Δ^kP 如下:$\Delta^{k-1}P(x+1)-\Delta^{k-1}P(x)$,则称 Δ^kP 为P 的k 阶差分.

显然若差分表中某一行全为 0,则相继的下一行也一定全为 0,因此没有必要再往下列.

定理 4.4.1 差分算子 Δ 是线性算子.

证明 设 a、b 为常数,f、g 为两个函数,则有

$$\Delta(af+bg)(x)=$$
$$(af+bg)(x+1)-(af+bg)(x)=$$
$$af(x+1)+bg(x+1)-af(x)-bg(x)=$$
$$a[f(x+1)-f(x)]+b[g(x+1)-g(x)]=$$
$$a\Delta f(x)+b\Delta g(x)=$$
$$(a\Delta f+b\Delta g)(x).$$

定理 4.4.1 很容易推广到多个函数的线性组合的差分.

下面讨论 n 次多项式 P 的差分的性质.

若 $n=0$,则 P 是常数,从面 $\Delta P=0$.

若 $P=x^k$,$k\geqslant1$,则

$$\Delta P(x)=\Delta(x^k)=(x+1)^k-x^k=\sum_{i=0}^{k-1}C_k^i x^i$$

是一个 $k-1$ 次多项式.

故对于任意的 $n(n>0)$次多项式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,(a_n\neq0)$$

有
$$\Delta P(x)=\Delta(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)=$$
$$a_n\Delta x^n+a_{n-1}\Delta x^{n-1}+\cdots+a_1\Delta x$$

是一个 $n-1$ 次多项式.

定理 4.4.2 设 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个 n 次多项式,其中 $a_n\neq0$,则 $P(x)$的 $n+1$ 阶差分恒等于 0.

证明 每取一次差分,非常数多项式就降低一次次数,从面 n 次多项式 P 的 n 阶差分 Δ^nP 必为常数. 从而 P 的 $n+1$ 阶差分 $\Delta^{n+1}P=\Delta(\Delta^nP)$必恒等于 0.

为了下面讨论的需要,我们先给出多项式的两个基本性质:

性质 1 如果对于无穷多个互异值 x,多项式 $P(x)$之值均为 0,则 $P(x)$恒等于零多项式;

性质 2 如果 $P(x)$和 $Q(x)$都是次数不超过 n 的多项式,且

$P(x)$和$Q(x)$在$n+1$个不同点上之值相同,则对任何x,恒有

$$P(x)=Q(x).$$

例 4.4.1 给定差分表为

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & & a & & b & & c & & d & & e & & \cdots \\
& -1 & & r & & s & & t & & u & & \cdots & \\
& & 3 & & h & & k & & l & & \cdots & & \\
& & & 0 & & w & & x & & \cdots & & & \\
& & & & 0 & & y & & \cdots & & & & \\
& & & & & & \cdots & & & & & &
\end{array}$$

试确定由差分表所决定的多项式$P(x)$.

解 由差分表的意义,即可求出

$$a=1, r=2, h=3, w=0, y=0, \cdots,$$
$$b=3, s=5, k=3, x=0, \cdots$$

于是可得差分表

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
2 & & 1 & & 3 & & 8 & & 16 & & 27 & & \cdots \\
& -1 & & 2 & & 5 & & 8 & & 11 & & \cdots & \\
& & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & \cdots & & \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots & & & \\
& & & & 0 & & 0 & & \cdots & & & & \\
& & & & & 0 & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

从而知由上述差分表得到的多项式为二次多项式,
且$P(0)=2, P(1)=1, P(2)=3$,设

$P(x)=ax^2+bx+c$,将上面三值代入即可求出

$$P(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}x+2.$$

事实上,整个函数的差分表可由它左边斜列完全确定.

下面考虑差分表左边斜列上第i个元素为1(从左上角依次为第0个,第1个,…),而其余元素全为0的情形,并找出其相应的多项式P_i.

对于$i=3$,得差分表为

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & & 20 & & \cdots \\
 & 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & \cdots \\
 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & \cdots \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \cdots \\
 & & & & & & \cdots
\end{array}
$$

不难得出 $P_3(x)=C_x^3=\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}$.

可以证明，$P_i(x)=C_x^i$.

事实上，列出 $P_i(x)=C_x^i$ 的差分表，可知：第 0 行中第 0 个，第 1 个，…，第 $i-1$ 个元素均为 0，从而差分表左边斜列的第 0 个，第 1 个，…，第 $i-1$ 个元素全为 0；且左边斜列的第 i 个元素必等于第 0 行上的第 i 个元素，即 $P_i(i)=C_i^i=1$，因此，$P_i(x)=C_x^i$ 是 i 次多项式，从而自第 $i+1$ 行起，差分表上元素全为 0，因此 $P_i(x)=C_x^i$ 的差分表之左边列上的元素除第 i 个为 1 外，其余的全为 0.

注：这里 $C_x^i=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$.

由以上叙述及差分的线性性质，我们有：

定理 4.4.3 如果多项式 P 的差分表左边斜列的元素依次为 $d_0,d_1,\cdots,d_n,0,\cdots,0,\cdots$，则

$$P(x)=d_0C_x^0+d_1C_x^1+\cdots+d_nC_x^n.$$

例 4.4.2 对 $P(x)=x^3+2x^2-3x+2$，列出差分表.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
2 & & 2 & & 12 & & 38 & & 86 & & \cdots \\
 & 0 & & 10 & & 26 & & 48 & & \cdots \\
 & & 10 & & 16 & & 22 & & \cdots \\
 & & & 6 & & 6 & & \cdots \\
 & & & & 0 & & \cdots
\end{array}
$$

我们有 $P(x)=2P_0(x)+0P_1(x)+10P_2(x)+6P_3(x)=$

$$2+10C_x^2+6C_x^3.$$

定理 4.4.4 如果 P 是 n 次多项式，其差分表左边斜列元素依次为 $d_0, d_1, \cdots, d_n, 0, \cdots, 0, \cdots$，

则
$$P(0)+P(1)+\cdots+P(m)=$$
$$\sum_{t=0}^{m}P(t)=d_0C_{m+1}^{1}+d_1C_{m+1}^{2}+\cdots+d_nC_{m+1}^{n+1}.$$

证明 注意到组合数公式

$$\sum_{t=0}^{m}C_t^k=C_0^k+C_1^k+\cdots+C_m^k=C_{m+1}^{k+1},$$

从而由定理 4.4.3 可得

$$P(x)=d_0C_x^0+d_1C_x^1+\cdots+d_nC_x^n,$$

于是
$$\sum_{t=0}^{m}P(t)=\sum_{t=0}^{m}[d_0C_t^0+d_1C_t^1+\cdots+d_nC_t^n]=$$
$$d_0\sum_{t=0}^{m}C_t^0+d_1\sum_{t=0}^{m}C_t^1+\cdots+d_n\sum_{t=0}^{m}C_t^n=$$
$$d_0C_{m+1}^{1}+d_1C_{m+1}^{2}+\cdots+d_nC_{m+1}^{n+1}.$$

利用定理 4.4.4，可对任一多项式 $P(x)$ 计算和式 $P(0)+P(1)+\cdots+P(m)=\sum_{t=0}^{m}P(t)$，并进而计算前 n 个正整数的 k 次幂之和.

例 4.4.3 求和 $1^2+2^2+\cdots+m^2$，m 为正整数.

解 令 $P(x)=x^2$，则得差分表

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & \cdots \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \cdots \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & \cdots \\
& & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots \\
& & & & & \cdots
\end{array}$$

这里 $d_0=0, d_1=1, d_2=2, d_3=0, \cdots$

于是由定理 4.4.4，得

$$1^2+2^2+\cdots+m^2=\sum_{t=0}^{m}P(t)=$$
$$d_0C_{m+1}^{1}+d_1C_{m+1}^{2}+d_2C_{m+1}^{3}=$$
$$\frac{(m+1)m}{2\cdot1}+2\frac{(m+1)m(m-1)}{3\cdot2\cdot1}=$$

$\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$.

例 4.4.4 求和$1^3-2^3+\cdots+m^3$，m 为正整数.

解 令 $P(x)=x^3$，则得差分表

0　1　8　27　64　125　216　…

1　7　19　37　61　91　…

6　12　18　24　30　…

6　6　6　6　6　…

0　0　0　…

…　…

于是有　$1^3+2^3+\cdots-m^3=\sum_{t=0}^{m}P(t)=$

$d_0C_{m+1}^1+d_1C_{m+1}^2+d_2C_{m+1}^3+d_3C_{m+1}^4=$

$\frac{(m+1)m}{2\cdot 1}+6\frac{(m+1)m(m-1)}{6}+$

$6\frac{m(m+1)(m-1)(m-2)}{24}=$

$\frac{1}{4}m(m+1)[2+4(m-1)-(m-1)(m-2)]=$

$\frac{1}{4}m^2(m-1)^2=[\frac{m(m+1)}{2}]^2=$

$(1+2+3+\cdots+m)^2$.

例 4.4.5 求和$1^4-2^4+\cdots+m^4$，m 为正整数.

解 令 $P(x)=x^4$，则得差分表

0　1　16　81　256　625　…

1　15　65　175　369　…

14　50　110　194　…

36　60　84　…

24　24　…

0　…

从而可得 $\sum_{t=1}^{m} t^4 = \sum_{t=0}^{m} P(t) =$

$$C_{m+1}^2 + 14C_{m+1}^3 + 36C_{m+1}^4 + 24C_{m+1}^5 =$$

$$\frac{1}{2}m(m+1) + \frac{7}{3}(m+1)m(m-1) +$$

$$\frac{3}{2}(m+1)m(m-1)(m-2) +$$

$$\frac{1}{5}(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3) =$$

$$\frac{1}{30}m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1).$$

用类似的方法,我们可以对任何正整数 n 和 m 计算 $1^n + 2^n + 3^n + \cdots + m^n$.

习题四

1. 设 $U_0, U_1, U_2, \cdots$,为斐波那契数列,通过对较小的 n 值计算下面每一个表达式,猜测一个一般的公式,然后用数学归纳法证明之.

(1) $U_1 + U_3 + \cdots + U_{2n-1}$;

(2) $U_0 + U_2 + \cdots + U_{2n}$;

(3) $U_0 - U_1 + U_2 - \cdots + (-1)^n U_n$.

2. 解满足初值 $a_0 = 0$ 和 $a_1 = 1$ 的递归关系, $a_n = 4a_{n-2}$; $n = 2, 3, 4, \cdots$.

3. 解满足初值 $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$ 的递归关系
$f(n) = f(n-1) + 9f(n-2) - 9f(n-3)$; $n = 3, 4, 5, \cdots$.

4. 解满足初值 $H(0) = -1$ 和 $H(1) = 0$ 的递归关系

$$H(n) = 8H(n-1) + 6H(n-2), n = 2, 3, 4, \cdots.$$

5. 解满足初值 $h(0) = 1, h(1) = 0, h(2) = 0$ 的递归关系

$$h(n) = 3h(n-2) - 2h(n-3), n = 3, 4, 5, \cdots.$$

6. 解满足初值 $b_0 = 5, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2$ 的递归关系

$b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2} - 4b_{n-3} + 8b_{n-4}, n = 4,5,6,\cdots.$

7. 求解下面的递归关系

(1) $H(n) = 3H(n-1), n = 1,2,3,\cdots \quad H(0) = 1;$

(2) $f(n) = f(n-1) - n + 3, n = 1,2,3,\cdots \quad f(0) = 2;$

(3) $h(n) = -h(n-1) + 1, n = 1,2,3,\cdots \quad h(0) = 1;$

(4) $F(n) = -F(n-1) + 2, n = 1,2,3,\cdots \quad F(0) = 1;$

(5) $G(n) = 2G(n-1) + 1, n = 1,2,3,\cdots \quad G(0) = 1.$

8. 设 $P(x) = 2x^2 + x + 3$,求$\sum_{t=0}^{m} P(t)$.

9. 设 $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1$,求$\sum_{t=0}^{m} P(t)$.

10. 设 $P(x)$是一个三次多项式,且在 $P(x)$的差分表中第 0 行的前 4 项为:1, −1,3,19,试确定 $P(x)$,并计算$\sum_{t=0}^{m} P(t)$.

11. 求出计算$\sum_{t=0}^{m} t^5$的一个公式.

12. 如果一个多项式的 $n+1$ 阶差分恒等于 0,证明这个多项式的次数最多为 n.

第五章　母　函　数

现在我们已得到了解决组合计数问题的一些方法，从基本的加法原理和乘法原理出发，导出了许多排列和组合的公式，证明了容斥原理并将其用于不同的计数问题．第四章我们又讨论了寻求递归关系的某些方法．递归关系是计数的一个强有力工具，而递归关系的求解主要是借助于母函数（或叫做生成函数），本章将专门对母函数进行进一步的讨论．

§5.1　母函数

设 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为一数列，它的母函数定义为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

对于有限数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$，可将其看作数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, 0, \cdots, 0, \cdots$，从而其母函数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + 0 \cdot x^{n-1} + \cdots + 0 \cdot x^{n+k} + \cdots = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

注　级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 中，$x^0 = 1, x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n, \cdots$ 均作为形式符号，而不管复数域（或实数域）内级数的收敛域，即我们的定义中不涉及级数的收敛性问题．虽然我们给出的级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 不同于数学分析中讨论的幂级数，但它们的四则运算完全可以仿照绝对收敛级数的运算法则来定义，这里不再一一赘述．

例 5.1.1　设 $f(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$，$g(x) = 1 - x$，则

$f(x)g(x)=1$，这表明 $f(x)=\frac{1}{g(x)}$，即 $1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$，我们称"和函数"$\frac{1}{1-x}$为级数 $1+x+x^2+\cdots$的"紧凑形式".

例 5.1.2 由例5.1.1知，$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k$，于是有 $h(x)=\frac{1}{1-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}2^kx^k$，从而

$$[h(x)-f(x)](1-3x+2x^2)=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)x^k\cdot(1-3x+2x^2)=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^k,$$

显然，$C_1=2^1-1=1$，$C_2=-3(2^1-1)+1\cdot(2^2-1)=0$，

$k\geqslant 3$ 时

$$C_k=(2^{k-2}-1)\cdot 2-(2^{k-1}-1)\cdot 3+(2^k-1)\cdot 1=$$
$$2^{k-2}-2-3\cdot 2^{k-1}+3+2^k-1=0.$$

故 $[g(x)-f(x)](1-3x+2x^2)=x$，亦即

$$\frac{1}{1-2x}-\frac{1}{1-x}=h(x)-f(x)=\frac{x}{1-3x+2x^2}.$$

例 5.1.3 设 m 为正整数，则对于二项式系数数列 $C_m^0, C_m^1, C_m^2, \cdots, C_m^m$ 的母函数为

$$B_m(x)=C_m^0+C_m^1x+C_m^2x^2+\cdots+C_m^mx^m=(1+x)^m.$$

例 5.1.4 设 α 为实数，则二项式系数序列 $C_\alpha^0, C_\alpha^1, C_\alpha^2, \cdots, C_\alpha^n\cdots$ 的母函数为 $B_\alpha(x)=C_\alpha^0+C_\alpha^1x+C_\alpha^2x^2+\cdots+C_\alpha^nx^n+\cdots$

显然，$B_\alpha(x)=(1-x)^\alpha$.

例 5.1.5 设 $f(x)=\frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$，则有

$$4f^2(x)=[1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}][1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}]=$$
$$1-2(1-4x)^{\frac{1}{2}}+1-4x=$$
$$2[1-2x-(1-4x)^{\frac{1}{2}}],$$
$$\Rightarrow 2f^2(x)=1-2x-(1-4x)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Rightarrow 2(f^2(x)+x)=1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}=2f(x),$$
$$\Rightarrow f^2(x)-f(x)+x=0,$$

即 $f(x)=\dfrac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}$是方程 $f^2(x)-f(x)+x=0$ 的根.

以上几个例题中,我们利用了数学分析中绝对收敛幂级数的和函数进行运算,这显然是方便的,但有关这样运算的合理性,可用近世代数的方法加以论证,而有关严格的论证,已超出了本书的范围,故我们这里从略.

例 5.1.6 求出数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的母函数 $g_r(x)$,其中 a_n 为 r 个相异元素的 n 元重复组合数.

解 因为 $a_n=C_{r+n-1}^n$,于是所求母函数

$$g_r(x)=C_{r-1}^0+C_r^1\cdot x+C_{r+1}^2\cdot x^2+\cdots+C_{r+n-1}^n\cdot x^n+\cdots=$$
$$C_{-r}^0+C_{-r}^1(-x)+C_{-r}^2(-x)^2+\cdots+$$
$$C_{-r}^n\cdot(-x)^n+\cdots=$$
$$\frac{1}{(1-x)^r}=(1-x)^{-r}$$

其中用到了

$$C_{r+n-1}^n\cdot x^n=$$
$$\frac{(r+n-1)(r+n-2)\cdots[r+n-1-n+1]}{n!}x^n=$$
$$\frac{(-r-n+1)(-r-n+2)\cdots(-r)}{n!}(-x)^n=$$
$$\frac{(-r)(-r-1)\cdots[-r-(n-1)]}{n!}(-x)^n=$$
$$C_{-r}^n\cdot(-x)^n.$$

作为特例,当 $r=1$ 时,数列 $1,1,1,\cdots,1,\cdots$的母函数为

$$g_1(x)=\frac{1}{1-x};$$

而当 $r=2$ 时,$1,2,3,\cdots,n,\cdots$的母函数为

$$g_2(x)=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

本例中，我们从给定数列出发，由定义写出其母函数，再设法将母函数写成紧凑形式“和函数”．但在计数问题中，母函数的实际应用常常相反，即先有母函数 $f(x)$ 的“和函数”，再将 $f(x)$ 展示为幂级数，从而得到数列本身，且数列的通项往往是某个计数问题所求的数目．

例 5.1.7 设 a_n 表示从 k 个不同元素中取 n 个元素的重复组合数，且其中每一个不同元素都出现偶数次．求数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 的母函数 $f_k(x)$ 以及数列的通项．

解 由数列定义可知，必

$$0 = a_1 = a_3 = a_5 = \cdots,$$

另外，显然 a_n 的一个等价定义是：a_n 恰为方程 $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k = n$ 的非负偶数解 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 的个数．

为此，我们考虑幂级数

$g(x) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots$，并考察 $g(x)$ 的 k 重乘积

$g^k(x) = (1 + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + \cdots)\cdots(1 + x^2 + \cdots)$，

显然 $g^k(x)$ 展开式中每一项均为如下形式

$$x^{u_1} x^{u_2} \cdots x^{u_k} = x^{u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k},$$

其中 x^{u_1} 为第一个幂级数中的一个项，x^{u_2} 为第二个幂级数中的一个项，$\cdots$，x^{u_k} 为第 k 个幂级数中的一个项．且这里 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 均为非负偶数．这样，将 $g^k(x)$ 展开后所得到的幂级数 $g^k(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ 中，x^n 的系数 a_n 恰为 $u_1 + u_2 + \cdots + u_k = n$ 的非负偶数解 $u_1, u_2, \cdots, u_k$ 的组数，从而 $g^k(x)$ 恰为题目给出数列的母函数．

因 $1 + x^2 + x^4 + \cdots = \dfrac{1}{1 - x^2}$，所以由例 5.1.6 有

$$g^k(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^k} = g_k(x^2) = C_{k-1}^0 + C_k^1 \cdot x^2 + C_{k+1}^2 \cdot x^4 + C_{k+2}^3 x^6 + \cdots + C_{k+n-1}^n x^{2n} + \cdots$$

这表明

$$a_{2n}=C_{k+n-1}^{n}=\frac{(k+n-1)(k+n-2)\cdots(k+2)(k+1)}{n!}$$

$n=0,1,2,3,\cdots.$

下面讨论如何用母函数来解常系数线性齐次递归关系.

先给出如下的牛顿二项式定理:

牛顿二项式定理 设 n 为正整数,r 是一个非零实数,则当 $|x|<\frac{1}{|r|}$ 时,

$$(1-rx)^{-n}=(-rx+1)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{-n}^{k}\cdot r^k x^k.$$

或表成 $\frac{1}{(1-rx)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{-n}^{k}\cdot r^k x^k.$

因 $C_{-n}^{k}=(-1)^k C_{k+n-1}^{k}$,故有

$$\frac{1}{(1-rx)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+n-1}^{k}r^k x^k,\ |x|<\frac{1}{|r|}.$$

本定理可由数学分析得知,这里不再证明.

例 5.1.8 确定平方数列,0,1,4,…,n^2,…的母函数.

解 取 $n=2,r=1$,则得

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{k+1}^{k}x^k=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots,$$

从而
$$\frac{x}{(1-x)^2}=x+2x^2+3x^2+\cdots+nx^n+\cdots$$

微分之,有

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=1+2^2x+3^2x^3+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots,$$

两边再乘以 x,即得

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}=x+2^2x^2+3^2x^4+\cdots+n^2x^n+\cdots,$$

这表明 $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$ 就是平方数列的母函数.

例 5.1.9 解满足初值 $h(0)=1,h(1)=-2$ 的递归关系

$h(n)=5h(n-1)-6h(n-2),n=2,3,4,\cdots.$

解　可记作 $h(n)=a_n$，即

$$a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}, a_0=1, a_1=-2.$$

为求 a_n 的表达式，可设其母函数为

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots. \quad ①$$

再根据题设条件 $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$，可用 $-5x$ 与 $6x^2$ 分别去乘 $f(x)$，得

$$-5xf(x)=-5a_0x-5a_1x^2-5a_2x^3-\cdots-5a_{n-1}x^n-\cdots \quad ②$$

$$6x^2f(x)=6a_0x^2+6a_1x^3+6a_2x^4+\cdots+6a_{n-2}x^n+\cdots \quad ③$$

将①、②、③式相加，得

$$(1-5x+6x^2)f(x)=$$

$$a_0+(a_1-5a_0)x+(a_2-5a_1+6a_0)x^2-\cdots+$$

$$(a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2})x^n-\cdots$$

由递归关系，知 $a_n-5a_{n-1}+6a_{n-2}=0, n\geqslant 2$，

$$\Rightarrow(1-5x+6x^2)f(x)=a_0-(a_1-5a_0)x,$$

而 $a_0=h(0)=1, a_1=h(1)=-2$，

$$\Rightarrow(1-5x+6x^2)f(x)=1-7x$$，故

$$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x-6x^2}.$$

为求 a_n 的表达式，即求出 $f(x)$ 的幂级数展开式，我们可用部分分式的方法将 $f(x)$ 写成

$$f(x)=\frac{1-7x}{1-5x+6x^2}=\frac{1-7x}{(1-2x)(1-3x)}=$$

$$\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{1-3x}$$

求得　$A=5, B=-4$. 但

$$\frac{1}{1-2x}=\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^n, \frac{B}{1-3x}=\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^n$$，故

$$f(x)=5\sum_{k=0}^{\infty}(2x)^n-4\sum_{k=0}^{\infty}(3x)^n=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(5\cdot 2^n-4\cdot 3^n)x^n.$$

从而 $$a_n=5\cdot 2^n-4\cdot 3^n.$$

本例中的方法适用于解任何常系数线性齐次递归关系，相应的母函数为$\frac{p(x)}{q(x)}$的形式．且$q(x)$是常数项为1的k次多项式，k是递归关系的阶，$p(x)$为次数低于k的多项式．为了求得数列通项公式，可用部分分式法将$\frac{p(x)}{q(x)}$表示为形如$\frac{A}{(1-rx)^t}$的分式之和，其中t是正整数，r为实数，A为常数（可由待定系数法来确定）．然后利用牛顿二项式定理求出$\frac{1}{(1-rx)^t}$的幂级数，最后将每个$\frac{A}{(1-rx)^t}$的幂级数展开式合并同类项，即可得到所求母函数的幂级数展开式，从而数列的通项也就可以求出了．

这种方法与我们在上一章中介绍的求特征根的方法解递归关系有着密切的内在联系．

事实上，相应于母函数$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$的k阶递归关系的特征方程为$\varphi(x)=x^kq(\frac{1}{x})=0$，于是，$\frac{A}{(1-rx)^t}$中的$r$恰好是$\varphi(x)$的根，而$t$又恰是$r$作为特征根的重数．

下面我们再考虑问题的另一个方面，给出k次多项式

$q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k$，其中$b_0\neq 0$，$b_k\neq 0$，并给出了次数低于$k$的多项式

$$p(x)=d_0+d_1x+\cdots+d_{k-1}x^{k-1},$$

则先用部分分式方法，再用牛顿二项式定理，可以将$\frac{p(x)}{q(x)}$展开为幂级数

$$\frac{p(x)}{q(x)}=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

且此幂级数当$|x|<|r|$时，将收敛于$\frac{p(x)}{q(x)}$，

其中r为方程$q(x)=0$的根中绝对值最小者．

又因$b_0\neq 0$，$r\neq 0$，故可有

$p(x)=q(x)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)$，即

$$d_0+d_1x+\cdots+d_{k-1}x^{k-1}=$$

$$(b_0+b_1x+\cdots+b_kx^k)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots).$$

将上式右端乘出，并比较两端系数，得方程组

$$\begin{cases}b_0a_0=d_0\\ b_0a_1+b_1a_0=d_1\\ \cdots\cdots\\ b_0a_{k-1}+b_1a_{k-2}+\cdots+b_{k-2}a_1+b_{k-1}a_0=d_{k-1}\end{cases}$$

及 $b_0a_n+b_1a_{n-1}+\cdots+b_ka_{n-k}=0, n=k,k+1,\cdots$.

注意到 $b_0\neq0$，故最后一式可写为

$$a_n+\frac{b_1}{b_0}a_{n-1}+\cdots+\frac{b_k}{b_0}a_{n-k}=0, n=k,k+1,\cdots,$$

此即为数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$所满足的常系数线性齐次递归关系，且初值 $a_0,a_1,\cdots,a_{k-1}$可由上面的方程组确定.

综上所述，可得如下定理

定理 5.1.1 设 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$满足 k 阶常系数线性齐次递归关系

$$a_n+c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\cdots++c_ka_{n-k}=0,$$

其中 $c_k\neq0, n=k,k+1,\cdots$.

则 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$的母函数具有形式 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$，

其中 $q(x)$是一个具有非零常数项的 k 次多项式，而 $p(x)$是一个次数低于 k 的多项式.

反之，若给定这样的多项式 $p(x)$和 $q(x)$，则一定存在一个数列 $a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$，它满足题设的 k 阶常系数线性递归关系，且其母函数就是$\dfrac{p(x)}{q(x)}$.

例 5.1.10 求 n 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数.

解 设 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$是 $n-1$ 位十进制数，若它含有偶数个 5，则 p_n 取 5 以外的 0,1,2,3,4,6,7,8,9 这 9 个数中的一个；若 $p_1p_2\cdots$

p_{n-1}只含有奇数个 5，则取 $p_n=5$，使 $p_1p_2\cdots p_n$ 成为出现偶数个 5 的十进制数.

若记 a_n 为 n 位十进制数中出现偶数个 5 的数的个数；b_n 为 n 位十进制数中出现奇数个 5 的数的个数. 则可得

$$\begin{cases}a_n=9a_{n-1}+b_{n-1}\\ b_n=9b_{n-1}+a_{n-1},\end{cases}$$

且 $a_1=8,b_1=1$.

上式的 $a_n=9a_{n-1}+b_{n-1}$表达了含有偶数个 5 的 n 位十进制数的两个组成部分，$9a_{n-1}$为由含有偶数个 5 的 $n-1$ 位十进制数 $p_1p_2\cdots p_{n-1}$添加 p_n 取 5 以外的 9 个数后所构成的 n 位数的个数；b_{n-1}为由含有奇数个 5 的 $n-1$ 位十进制数添加 p_n 取 5 后所构成的 n 位数的个数.

同样，$b_n=9b_{n-1}+a_{n-1}$也可同样解释.

又，$n-1$ 位的十进制数的全体共 $9\cdot10^{n-2}$个，从中去掉含有偶数个 5 的数后，余下的便是 $n-1$ 位数中含有奇数个 5 的数. 从而有

$$b_{n-1}=9\cdot10^{n-2}-a_{n-1},$$

$$\Rightarrow a_n=9a_{n-1}-b_{n-1}=9a_{n-1}+9\cdot10^{n-2}-a_{n-1}=$$
$$8a_{n-1}+9\cdot10^{n-2},$$

即 $a_n-8a_{n-1}=9\cdot10^{n-2}$.

设数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$的母函数为

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，其中 $a_0=0,a_1=8$，从而

$$-8xf(x)=-8a_0x-8a_1x^2-\cdots-8a_{n-1}x^n-8a_nx^{n+1}-\cdots$$

再将两式相加，得

$$(1-8x)f(x)=$$
$$a_0+(a_1-8a_0)x+(a_2-8a_1)x^2+\cdots-(a_n-8a_{n-1})x^n+\cdots=$$
$$a_1x+9\cdot10^{2-2}x^2+9\cdot10^{3-2}x^3+\cdots+9\cdot10^{n-2}x^n+\cdots=$$
$$8x+9x^2(1+10x+\cdots+10^{n-2}x^{n-2}+\cdots)=8x+\frac{9x^2}{1-10x}=$$

$x \cdot \frac{8-71x}{1-10x}$,故

$$f(x)=x\cdot\frac{8-71x}{(1-8x)(1-10x)}=$$

$$\frac{1}{2}x\cdot\left(\frac{7}{1-8x}+\frac{9}{1-10x}\right)=$$

$$\frac{1}{2}x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(7\cdot 8^k+9\cdot 10^k)x^k=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{7}{2}\cdot 8^k+\frac{9}{2}\cdot 10^k\right)x^{k+1},$$

由此即得 $a_n=\frac{7}{2}\cdot 8^{n-1}+\frac{9}{2}\cdot 10^{n-1}$.

例 5.1.11 试用母函数的方法求出斐波那契数列 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$的通项公式.其中 $F_0=F_1=1,n\geqslant 2$.

解 由定义知母函数为

$$f(x)=F_0+F_1x+F_2x^2+\cdots+F_nx^n+\cdots$$

$$xf(x)=F_0x+F_1x^2+\cdots+F_{n-1}x^n+\cdots$$

$$x^2f(x)=F_0x^2+\cdots+F_{n-2}x^n+\cdots$$

$$\Rightarrow(1-x-x^2)f(x)=$$

$$F_0+(F_1-F_0)x+(F_2-F_1-F_0)x^2+\cdots+$$

$$(F_n-F_{n-1}-F_{n-2})x^n+\cdots.$$

注意到,$n\geqslant 2$ 时,有 $F_n-F_{n-1}-F_{n-2}=0$,故

$(1-x-x^2)f(x)=F_0-(F_1-F_0)x=1$,从而

$$f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=$$

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}=$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot x^k-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\cdot x^k=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot x^k-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\cdot x^k=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]x^k,$$

由此得 $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$

例 5.1.12 用母函数的方法计算行列式

$$d_n=\begin{vmatrix}2&1&0&\cdots&0&0\\1&2&1&\cdots&0&0\\0&1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&1\\0&0&0&\cdots&1&2\end{vmatrix}$$

解 根据行列式的性质,有

$d_n=2d_{n-1}-d_{n-2}$,且 $d_1=2,d_2=3$,令 $d_0=1$,则 $d_2=2d_1-d_0$,于是可得母函数

$f(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3+\cdots,$

$-2xf(x)=-2d_0x-2d_1x^2-2d_2x^3-\cdots,$

$x^2f(x)=d_0x^2+d_1x^3-d_2x^4+\cdots,$

$\Rightarrow(1-2x+x^2)f(x)=d_0+(d_1-2d_0)x=1$,故

$f(x)=\frac{1}{1-2x+x^2}=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\cdot x^k,$

从而有 $d_n=n+1$.

显然本题也可用求解特征方程的方法来求行列式之值.

事实上,特征方程为

$x^2-2x+1=0$,特征根 $x=1$ 为二重根,于是得到递归关系的解为:

$d_n=C_1\cdot 1^n+C_2\cdot n\cdot 1^n=C_1+C_2\cdot n$

再由初值条件 $d_1=2,d_2=3$,得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 2C_2 = 3 \end{cases}$$

求出 $C_1 = 1, C_2 = 1$，故 $d_n = n + 1$.

§5.2 其他递归关系

在解一般递归关系时，母函数也是一个有力的工具，我们通过具体例子来说明这一点.

例 5.2.1 解递归关系

$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^{n-1}, n = 2, 3, \cdots,$

其初值为 $a_0 = 0, a_1 = 1$.

解 设所求数列的母函数为

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，则

$-3xf(x) = -3a_0 x - 3a_1 x^2 - \cdots - 3a_{n-1} x^n + \cdots$

$2x^2 f(x) = 2a_0 x^2 + \cdots + 2a_{n-2} x^n + \cdots$

于是可得

$(1 - 3x + 2x^2) f(x) =$

$a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1 + 2a_0)x^2 + \cdots +$

$(a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2})x^n + \cdots.$

注意到 $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-1} = 2^{n-1}, n \geqslant 2$，且 $a_0 = 0, a_1 = 1$，于是有

$(1 - 3x + 2x^2) f(x) =$

$$x + 2^1 \cdot x^2 + 2^2 \cdot x^3 + \cdots + 2^{n-1} \cdot x^n + \cdots = \frac{x}{1 - 2x},$$

故
$$f(x) = \frac{x}{(1 - 3x + 2x^2)(1 - 2x)} =$$

$$\frac{x}{(1 - x)(1 - 2x)^2} =$$

$$\frac{1}{1 - x} - \frac{2}{1 - 2x} + \frac{1}{(1 - 2x)^2} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k - 2\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot 2^k \cdot x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [1 - 2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^k] \cdot x^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [1 + (k-1) \cdot 2^k] \cdot x^k$$

因此,$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2^n, n = 0,1,2,\cdots$.

本例也可用特征方程求解,但必须先将其变形为常系数齐次递归关系.

事实上,由 $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^{n-1}$,得

$2a_n - 6a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$,从而

$2a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} = 2^{n-1}$,于是有

$$\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^{n-1} \\ 2a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4a_{n-3} = 2^{n-1}, \end{cases}$$

$\Rightarrow a_n - 5a_{n-1} + 8a_{n-2} - 4a_{n-3} = 0$,

特征方程为 $x^3 - 5x^2 - 8x - 4 = 0$,特征根为 $x = 1$(单根),$x = 2$(二重根).

于是 $a_n = 1^n \cdot C_1 + 2^n \cdot C_2 + n \cdot 2^n C_3$,代入初值条件 $a_0 = 0$,$a_1 = 1$,并由递归关系求出 $a_2 = 3a_1 - 2a_0 + 2^{2-1} = 3 - 0 + 2 = 5$,得

$$\begin{cases} C_1 - C_2 - 0 \cdot C_3 = 0 \\ C_1 - 2C_2 + 2C_3 = 1 \\ C_1 - 4C_2 + 8C_3 = 5, \end{cases}$$

求出 $C_1 = 1, C_2 = -1, C_3 = 1$,于是

$$a_n = 1 - 2^n + n \cdot 2^n = 1 + (n-1) \cdot 2^n.$$

下面我们再举一个母函数在几何问题中应用的例子.

首先,我们指出,对任一个凸 n 边形($n \geqslant 4$),用在其内部不相交的对角线将其分成各个三角形区域,共需 $n-3$ 条对角线.例如,从一个顶点出发的 $n-3$ 条对角线就是一个简单的例子.一般的来说,我们还可以给出其他的引对角线的方法.例如,图 5.2.1 中给出了用

4 条对角线将一个凸七边形区域划分成五个三角形区域的办法.



图 5.2.1

例 5.2.2 设 a_n 为用添加不交于其内部的对角线将一个凸 $n+1$ 边形区域划分为三角形区域的方法数目,则下式成立:

$$a_n=\frac{1}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1}, n=2,3,4,\cdots.$$

证明 为方便记,我们定义 $a_0=0, a_1=1$,即对于 a_0 来说,我们将"一边形"(一条线段)看作是没有内部的区域,从而其连对角线的方法数为 0;对于 a_1 来说,我们可以认为不相邻的两个端点可连一条"对角线",从而得到一个三角形区域.

显然对于 $n=2$,也必有 $a_2=1$,这是因为一个三角形区域没有对角线,它也不能进一步划分,即只有原来的一个三角形.

下面我们来证明数列:$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$满足递归关系

$$a_n=a_1a_{n-1}+a_2a_{n-2}+\cdots+a_{n-2}a_2+a_{n-1}a_1=$$
$$\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}, (n=2,3,\cdots),$$

为此,我们对 n 作归纳法.

$n=2$ 时,因$\sum_{k=1}^{2-1}a_ka_{2-k}=a_1a_1=(a_1)^2=1=a_2$,故此时递归关系 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$成立.

现设 $n\geqslant 3$,考虑一个有 $n+1$ 条边的凸多边形区域 R. 为叙述方便起见,我们指定其中的一条边,并称其为"底边". 在把 R 划分成三角形区域的每个划分中,底边必是某个三角形区域 T 的一条边,且这个三角形区域 T 将区域R 的其余部分划分为一个具有$k+1$ 条

边的凸多边形区域 R_1 和一个具有 $n-k+1$ 条边的凸多边形区域 R_2,其中 k 为 1,2,3…, $n-1$ 中某个数.对此,可由下面两个图表示.图 5.2.2 中 $k+1=2, n-k+1=n$;图 5.2.3 中,$k=2,3,\cdots$.

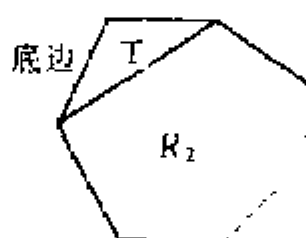


图 5.2.2

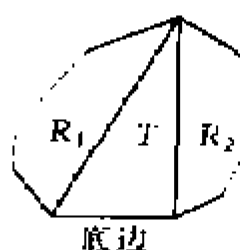


图 5.2.3

且图 5.2.2 中,R_1 为只有两条边(即三角形区域 T 的三条边中去掉与 R_2 邻接边)的"区域",即 R_1 不能构成区域.

对 R 的进一步划分.由添加不在其内部相交的 R_1 与 R_2 的对角线而完成.由归纳假设,因 R_1 有 $k+1$ 条边,R_2 有 $n-k+1$ 条边,故分别有 a_k 和 a_{n-k} 种方法完成对 R_1、R_2 的进一步划分.从而共有 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$ 种不同的方法添加在 R 内部不相交的对角线将 R 划分为三角形区域.

由此,归纳法完成.

下面再求递归关系 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$ 在初值 $a_0=0, a_1=1$ 之下的解.为此,设其母函数为

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$,则有

$f^2(x)=f(x)\cdot f(x)=$

$(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\cdots)=$

$(a_0)^2+(a_0a_1+a_1a_0)x+(a_0a_2+a_1a_1+a_2a_0)x^2+$

$\cdots+(a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_{n-1}a_1+a_na_0)x^n+\cdots$.

由 $a_0=0, a_1=1$,知 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}$,从而

$f^2(x)=(a_0)^2+(a_0a_1+a_1a_0)x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+$
$\cdots=$

$$a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n-\cdots=$$
$$f(x)-a_0-a_1x=$$
$$f(x)-x.$$

这表明函数 $f(x)$满足方程(函数方程)

$$f^2(x)-f(x)+x=0.$$

前面§5.1例5.1.5中,我们已得到该方程的根为

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{(1-4x)}}{2}$$

且满足初值条件 $f(0)=a_0=0$,再根据牛顿二项式定理,有

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}}=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{k}\cdot(-4x)^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_{\frac{1}{2}}^{k}\cdot(-4x)^k=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\cdot(-4x)^k=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)(-3)(-5)\cdots(-2k+3)}{2^k\cdot k!}\cdot(-1)^k\cdot 4^k\cdot x^k=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^k\cdot k!\cdot 2^{k-1}\cdot(k-1)!}\cdot(-1)^k\cdot 2^{2k}\cdot x^k=$$
$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2}{k}\cdot C_{2k-2}^{k-1}\cdot x^k=$$
$$1-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot C_{2k-2}^{k-1}\cdot x^k,$$

其中$|4x|<1$即,$|x|<\frac{1}{4}$.于是,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\cdot C_{2k-2}^{k-1}\cdot x^k,\text{从而}$$

$$a_n=\frac{1}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1},n=1,2,3,\cdots$$

我们称 $g(n)=a_n=\frac{1}{n}\cdot C_{2n-2}^{n-1}$为 Catalan 数.而 Catalan 数常出现于许多有关组合数学的文章中.

最后,我们对组合数母函数 $f(x)=(1+x)^m$ 作如下解释:

$(1+x)^m$ 有 m 个 $(1+x)$ 的因子，每一个因子 $(1+x)$ 可让其对应一个符号，这样就有 m 个不同的符号，记为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$. 记作 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$. 由

$$(1+x)^m=(1+x)(1+x)\cdots(1+x)$$

可以把这 m 个因子自左向右让它们依次分别对应 $a_1,a_2,\cdots,a_m$. 这样，对 S 的任一个 k 子集 $\{a_{j_1},a_{j_2},\cdots,a_{j_k}\}$，取与 a_{j_i} 对应的因子 $(1+x)$ 中的 x，这 k 个 x 的乘积恰为 x^k. 因此，$(1+x)^m$ 的展开式中 x^k 的系数，就是 S 的 k 子集的个数. 利用这一思想，可以写出允许重复的组合数的母函数.

设 $S=\{n_1a_1,n_2a_2,\cdots,n_ka_k\}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为不同的元素，$n_1,n_2,\cdots,n_m$ 为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$ 可重复出现的次数. 则 S 的任一子集中元素 a_j 最多在该子集中出现 n_j 次. 若 a_i 在这个子集中出现 r 次，便以 x^r 来表示，因而 a_i 对应因子 $(1+x+x^2+\cdots+x^{n_i})$，于是允许重复组合数的普母函数为：

$$f(x)=(1+x+\cdots+x^{n_1})(1+x+\cdots+x^{n_2})\cdots(1+x+\cdots-x^{n_k}).$$

且其展开式中 x^r 的系数就是 S 的 r 子集的个数.

例 5.2.3 若有 1 克的砝码3枚，2 克的砝码 4 枚，4 克的砝码 2 枚，问共能称出几种不同的重量？各有几种称法方案？

解 1 克的砝码对应的因子为 $1+x+x^2+x^3$；2 克的砝码对应的因子为 $1+x^2+x^4+x^6+x^8$；4 克的砝码对应的因子为 $1+x^4+x^8$. 故所求数列的母函数为：

$$\begin{aligned}f(x)=&(1+x-x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(1+x^4+x^8)=\\&1+x+2x^2+2x^3+3x^4-3x^5+4x^6+4x^7+5x^8+\\&5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}-4x^{13}-3x^{14}+3x^{15}+\\&2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}.\end{aligned}$$

故可称出由 1～19 克各种整克数物体的重量，且 x^k 的系数即表示称重量为 k 克的方案数.

例 5.2.4 设有1,2,4,8,16,32 克砝码各一个，那么它能称出 1～63 克中的每一种整克数的重量，并且称法是唯一的.

证明 由于其母函数为

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})=$$

$$\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{16}}{1-x^8}\cdot\frac{1-x^{32}}{1-x^{16}}\cdot\frac{1-x^{64}}{1-x^{32}}=$$

$$\frac{1-x^{64}}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{62}+x^{63},$$

从而根据 x^k 的系数之意义,即可得所要证明的结论.

§5.3 指数型母函数

对于数列$\{a_n\}$,我们定义了形式幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 作为$\{a_n\}$的母函数,并利用这种母函数解决了许多问题. 但在求解各种排列问题时,还需要用到另一类型的母函数.

定义 5.3.1 对于数列$\{a_n\}$,形式幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=a_0+\frac{a_1}{1!}x+\frac{a_2}{2!}x^2+\cdots+\frac{a_k}{k!}x^k+\cdots,$$

称为数列$\{a_n\}$的指数型母函数.

如果以$\widetilde{a_n}=\frac{a_n}{n!}$来代替 a_n,则数列$\{\widetilde{a_n}\}$的普通型母函数就是数列$\{a_n\}$的指数型母函数,这样$\{a_n\}$的指数型母函数的各种运算(包括加、减、乘、除、微商、积分等)即可完全按照$\{\widetilde{a_n}\}$的普通型母函数相应运算而得出,而不必再另作规定.

由数学分析可知:

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,$$

故称$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ 为数列$\{a_n\}$的指数型母函数,而称前面讲的母函数为普通型母函数.

例 5.3.1 设 n 为正整数,则数列 $A_n^0,A_n^1,A_n^2,\cdots,A_n^n$ 的指数型母函数(以下简称为指母函数)为

$$f_e(x)=\frac{A_n^0}{0!}+\frac{A_n^1}{1!}x+\frac{A_n^2}{2!}x^2+\cdots+\frac{A_n^n}{n!}x^n=$$
$$1+nx+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n=$$
$$(1+x)^n.$$

这样,我们知道$(1+x)^n$就是数列$A_n^0,A_n^1,A_n^2,\cdots,A_n^n$的指母函数.而显然$(1+x)^n$恰为数列$C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^{n-1},C_n^n$的普通型母函数(以下简称为普母函数).

例 5.3.2 数列1,1,1,…,1,…的指母函数为

$$f_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=e^x.$$

例 5.3.3 设a为任一实数,数列$a^0=1,a^1,a^2,\cdots,a^n,\cdots$的指母函数为:

$$f_e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(ax)^n=e^{ax}.$$

由于组合数$C_n^k=\frac{1}{k!}A_n^k$,所以组合数的普母函数与排列数A_n^k的指母函数是一样的,即如例5.3.1所示:

$$(1+x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}C_n^kx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A_n^kx^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n^k}{k!}x^k.$$

上一节,我们曾指出可以用1和x表示一个元素在排列中不出现和出现两种状态.类似地,可用$\frac{1}{k!}x^k$来表示一个元素在一个排列里出现k次的状态.

设$S=\{n_1a_1,n_2a_2,\cdots,n_ma_m\}$表示由$n_1$个$a_1$,$n_2$个$a_2$,…,$n_m$个$a_m$构成的重集(即集合中允许有重复的元素),$S$允许重复的排列数的指母函数为:

$$f_e(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)=\prod_{i=1}^{m}f_i(x),$$

其中$f_i(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!}$,且$\frac{x^r}{r!}$的系数

$\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_m=r}\frac{r!}{r_1!\ r_2!\ \cdots r_m!}$表示从$S$中任取$r$个元素的允许

重复的排列种数.

特别,若要求在可重复排列中某个 a_i 至少出现一次,则

$$f_i(x)=x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n_i}}{n_i!}.$$

而某个 a_i 可以选取无穷次,即 $n_i=\infty$,则

$$f_i(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots=\mathrm{e}^x.$$

若每一个 a_i 均可以选取无穷次,则

$$f_e(x)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^m\frac{m^k}{k!}x^k,$$

即 S 选取 k 个元素的可重排列数有 m^k 种.

例 5.3.4 由1,2,3,4 四个数字组成的五位数中,1 出现一次或两次,2 出现最多一次,3 最多出现三次,4 出现偶数次的数有多少个?

解 由前面讨论知所求五位数的个数恰为下面函数中 $\frac{1}{5!}x^5$ 的系数:

$$f_e(x)=\left(x+\frac{x^2}{2!}\right)(1+x)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right)=$$

$$x+5\frac{x^2}{2!}+18\frac{x^3}{3!}+64\frac{x^4}{4!}+215\frac{x^5}{5!}+645\frac{x^6}{6!}+$$

$$1\,785\frac{x^7}{7!}+4\,060\frac{x^8}{8!}+7\,560\frac{x^9}{9!}+12\,600\frac{x^{10}}{10!},$$

故满足题目要求的五位数有 215 个.

例 5.3.5 确定用红、黄、蓝三种颜色着色一个 $1\times n$ 棋盘的方格的方法数,并要求使黄色的方格数为偶数.

解 用 a_n 表示这样的着色方法数,其中 a_0 定义为 1,则 a_n 为三种颜色(红、黄、和蓝色)组成的重集中 n - 排列数(可重排列),且该重集中每种颜色的重复数均为无穷,但黄色出现在排列中的次数为偶数.因此,$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的指母函数为:

$$f_e(x)=\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)^2.$$

但由$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$，

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots,$$

知 $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$，

故

$$f_e(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{2x}=\frac{1}{2}(e^{3x}+e^x)=$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}3^n\cdot\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(3^n+1)\cdot\frac{x^n}{n!}.$$

于是知 $a_n=\frac{1}{2}(3^n+1),n=0,1,2,\cdots$.

例 5.3.6 确定各位数字都是奇数，且1出现奇数次，3 出现偶数次的 n 位数的个数.

解 仿照例 5.3.4 的讨论，可设 a_n 表示所求 n 位数的个数，则可得其指母函数为

$$f_e(x)=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right)\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\right)^3=$$

$$\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\cdot\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})e^{3x}=$$

$$\frac{1}{4}(e^{5x}-e^x)=$$

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(5x)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(5^n-1)\frac{1}{n!}x^n,$$

故 $a_n=\frac{1}{4}(5^n-1),n=0,1,2,\cdots$.

习题五

1. 设 c 为实数，确定数列 $c^0,c^1,c^2,\cdots,c^n,\cdots$的母函数.其中

$c^0=1$.

2. 求数列$\{a_n\}$的母函数,其中

(1) $a_n=(-1)^n$, $n=0,1,2,\cdots$;

(2) $a_n=C_n^2$, $n=0,1,2,\cdots$;

(3) $a_n=n+5$, $n=0,1,2,\cdots$;

(4) $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $n=0,1,2,\cdots$;

(5) $a_n=(-1)^n\dfrac{1}{n!}$, $n=0,1,2,\cdots$.

3. 用母函数的方法解下列递归关系

(1) $a_n=4a_{n-2}$, $n=2,3,4,\cdots$;
$a_0=0,a_1=1$;

(2) $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, $n=2,3,4,\cdots$;
$a_0=1,a_1=3$;

(3) $a_n=a_{n-1}+9a_{n-2}-9a_{n-3}$, $n=3,4,5,\cdots$;
$a_0=0,a_1=1,a_2=1$;

(4) $a_n=8a_{n-1}-16a_{n-2}$, $n=2,3,4,\cdots$;
$a_0=-1,a_1=0$;

(5) $a_n=3a_{n-2}-2a_{n-3}$, $n=3,4,5,\cdots$;
$a_0=1,a_1=0,a_2=0$;

(6) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}-4a_{n-3}+8a_{n-4}$, $n=4,5,6,\cdots$.
$a_0=0,a_1=1,a_2=1,a_3=2$.

4. 确定立方数列$0,1,8,\cdots,n^3,\cdots$的母函数.

5. 设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$为由数列$a_n=n^3$所定义,其中$n=0,1,2,\cdots$.证明$a_n$满足关系$a_n=a_{n-1}+3n^2-3n+1$, $n=0,1,2,\cdots$.并用此递归关系确定数列$\{a_n\}$的母函数.

6. 设k为正整数,设$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$为由数列$a_n=n^k$所定义,其中$n=0,1,2,\cdots$.试确定数列$\{a_n\}$的一个递归关系,并由此递归关系确定它的母函数.

7. 确定数列 $1!,2!,3!,\cdots,n!,\cdots$ 的指母函数.

8. 设 α 为实数,数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 定义为 $a_0=1$,

$a_n=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, $n=1,2,3,\cdots$. 确定该数列的指母函数.

9. 已知数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的母函数,求 a_n 的表达式.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{5-6x+x^2}$;

(2) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{4-4x+x^2}$;

(3) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$.

10. 由1、3、5、7、9这5个数字组成的 n 位数中,数字1和数字3都出现偶数次的数有多少个?

第二篇　图　论

第一章　图的基本概念

§1.1　哥尼斯堡七桥问题

图论所研究的问题源远流长，它所研究的问题可追溯到 18 世纪. 早在 18 世纪初，著名的"哥尼斯堡七桥问题"就是当时很有趣的一个难题. 哥尼斯堡城 18 世纪属于东普鲁士，它位于普雷格尔河畔，河中有两个岛屿，河两岸与河中两岛通过七座桥彼此相连. 见图 1.1.1.

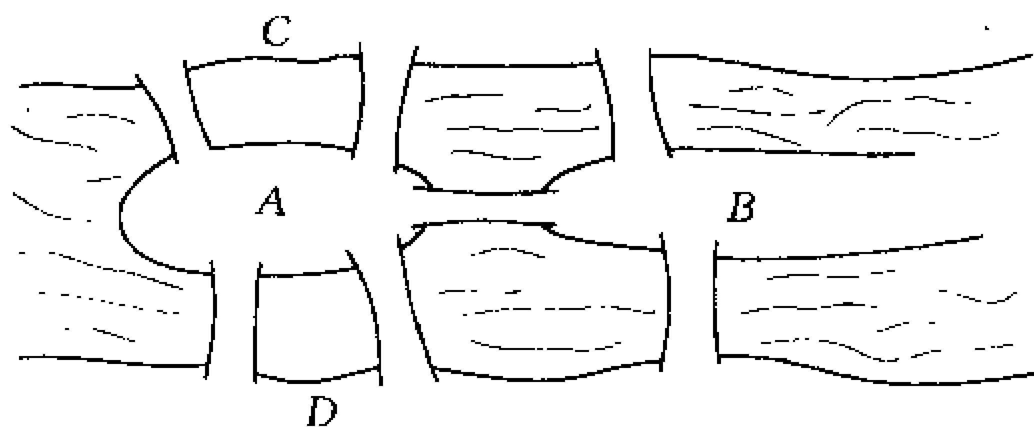


图 1.1.1

当时，哥尼斯堡人热衷于这样一个难题：一个散步者从河两岸

C,D 或两个小岛 A,B 中任何一个地方出发,能否找到一条路线,做到每座桥恰好通过一次而最后返回出发地.问题看起来并不复杂,但经过很多人的努力,谁也不能解决,即找不到一条满足要求的路线,也不能说明这样的路线不存在.这个问题引起了当时著名的数学家欧拉的注意.为了寻求答案,欧拉将 4 块陆地(河两岸及河中两岛)抽象地表示成 4 个点:A,B,C,D.若两块陆地之间有桥相连,则用连接两个点的连线来表示(有几座桥连几条线).这样,哥尼斯堡七桥问题就变成为由点和边所组成的图 1.1.2 所示的如下问题:

是否存在这样一条路线,从图 1.1.2 中的任一点出发,经过图中每条边一次且仅一次,最后返回到出发点?这样,问题就变得非常简洁、明了,同时也更一般、更深刻.

1736 年,欧拉发表了图论史上的第一篇论文《哥尼斯堡七桥问题》,给出了上述问题一个否定的回答,即,所要寻求的路线是不存在的.事实上,直观地不难发现,为了回到原来的出发点,必须要求从每一个顶点所引出的边的数目均为偶数,从而使得从一条边进去,再从另一条边出来.即有一进必须有一出,这样才能保证从任一点出发,经过每条边一次且仅一次最后回到出发点.但在图 1.1.2 中,从 B,C,D 引出的边均为 3 条,从 A 引出的边为 5 条,故从直观上即可认为哥尼斯堡七桥问题是无解的.在此基础上,欧拉找到了对于一般的图存在这样一条路线的充分且必要的条件.具体的论证方法,我们将在本章 §1.3 给出.

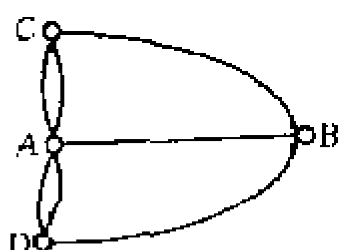


图 1.1.2

§1.2 基本概念

欧拉将哥尼斯堡七桥问题归结为一些点与连接这些点的线之间的联系,从而它可以用一个由若干个顶点和若干条边所组成的图形来表示,所以我们把一个顶点集合与一个边的集合放在一起,称之为

"图".

图论中所说的图是描述事物之间关系的一种手段.现实世界中,许多事物之间的关系可抽象成点及它们之间的连线,集合论中二元关系的关系图就是图论中"图"的很好的例子.在集合论中二元关系的关系图中,我们只关心点与点之间是否有边,而不关心点及边的位置,以及边的曲直、长短,这就是图论中的图与一般几何图形的区别.

下面给出图的抽象定义

定义 1.2.1 一个图 G 定义为一个偶对:(V,E),且记作 $G=(V,E)$,其中,V 是一个集合,V 中的元素称为顶点或端点;E 表示边的集合,E 中的元素称为边.

例 1.2.1 北京、上海、杭州、南京、广州、长沙、武汉、郑州、重庆、西安十个城市之间的航线构成一个图.其中:

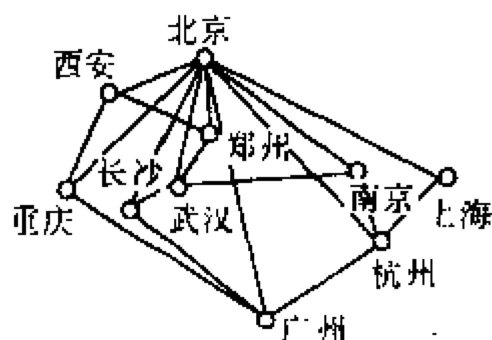


图 1.2.1

$V=${北京、上海、杭州、南京、广州、长沙、武汉、郑州、重庆、西安}为顶点的集合:

$E=${(北京,上海),(北京,杭州),(北京,南京),(北京,广州),(北京,长沙),(北京,武汉),(北京,郑州),(北京,重庆),(北京,西安),(上海,杭州),(杭州,广州),(杭州,南京),(南京,武汉),(武汉,郑州),(武汉,长沙),(长沙,广州),(广州,重庆),(重庆,西安),(西安,郑州)}为边的集合.见图 1.2.1.

例 1.2.2 图1.2.2所示的是有 4 个顶点,6 条边的图,可表示为:$G=(V,E)$.

其中，$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E=\{e_1=(v_1,v_2),e_2=(v_1,v_4),e_3=(v_1,v_3),e_4=(v_2,v_4),e_5=(v_3,v_4),e_6=(v_2,v_3)\}$.

这里，我们用一条边的两个顶点来表示该边，即，若某条边 e 的两个端点是 u 和 v，则将边 e 表示为 $e=(u,v)$，且 (u,v) 表示 u 和 v 的无(顺)序对，即：(u,v)，(v,u) 均表示以 u 和 v 为端点的同一条(无向)边.

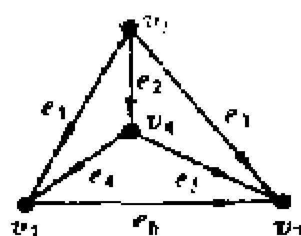


图 1.2.2

由以上两例，可知所谓图论中的图有如下两个特点：

1. 描述一个图的几何图形不是唯一的，几何图形仅描绘出该图的顶点与边之间保持的相互关联关系. 至于各顶点的相关位置以及各边的长、短、曲、直等都是无关紧要的.

2. 图的本质内容是各顶点与边之间的关联关系，至于顶点和边是否用平面上的几何点和线段来表示，则不是必要的. 换句话说，图的概念可以高度的抽象化，它完全可以由一个抽象集合 $G=(V,E)$ 来表示.

对于图 $G=(V,E)$ 中顶点的个数，我们用 $|V|$ 来表示，而边的数目用 $|E|$ 来表示. 若 $G=(V,E)$ 中的边的数目与顶点的个数均是有限的，则称 G 是有限图. 特别地，对于 $|V|=n$ 的有限图 G 称为 n 阶图，而当 $E=\varnothing$，$|V|=1$ 时，称 G 为平凡图(平凡图即为只有一个孤立顶点的图). 又当 G 不是有限图时(此时，或有 $|V|=\infty$，或有 $|E|=\infty$)，称 G 为无限图. 本书只讨论有限图.

上面例 1.2.1 及例 1.2.2 中图 G 的边的两个顶点 u，v 是无序的，我们称其为无向图. 但在实际问题中，将图 G 的每条边分配一个方向是经常遇到的. 将图 G 的每一条边都规定一个方向后，则将图 G 称为有向图. 对于有向图 $G=(V,E)$，其有向边记为：

$\vec{e}=\overrightarrow{(u,v)}$，其中 u 表示边 $\vec{e}$ 的起点，v 为边 $\vec{e}$ 的终点. 即边 $\vec{e_1}=\overrightarrow{(u,v)}$ 与边 $\vec{e_2}=\overrightarrow{(v,u)}$ 表示不同的边.

例 1.2.3 图1.2.3中的图 $G=(V1,E)$，其中

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$;

$E=\{\vec{e_1}=\overrightarrow{(v_1,v_2)},\vec{e_2}=\overrightarrow{(v_1,v_4)},\vec{e_3}=\overrightarrow{(v_1,v_3)},$

$\vec{e_4}=\overrightarrow{(v_4,v_2)},\vec{e_5}=\overrightarrow{(v_4,v_3)},\vec{e_6}=\overrightarrow{(v_2,v_3)}\}$即为有向图.

定义 1.2.2 在图 $G(V,E)$中,若顶点 v 是边 e 的一个端点,则称边 e 和顶点 v 相关联;

若 $u,v\in V$,且有 $e=(u,v)\in E$,则称顶点 u 和 v 是邻接的;

若 G 的两条边有共同的顶点,则称这两条边是邻接的.

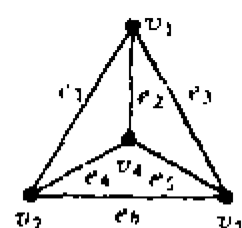
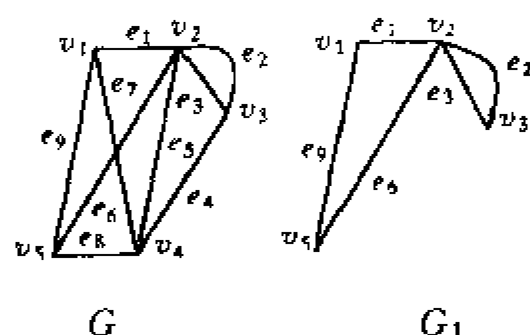


图 1.2.3

定义 1.2.3 设图 $G=(V,E)$和 $G_1=(V_1,E_1)$,若满足 $V_1\subseteq V$ 且 $E_1\subseteq E$,则称图 G_1 是图 G 的一个子图;若 $V_1\subset V$ 或 $E_1\subset E$,则称图 G_1 是图 G 的一个真子图.特别地,当 $V_1=V$ 时,称 G_1 是 G 的一个生成子图.

定义 1.2.4 设 $G=(V,E)$是一个无向图.对于 V 中每一顶点 v,称以 v 作为边的端点的次数之和为 v 的度数,成简称为 v 的度.一般地,对于图 G 中顶点 v 的度数记为:$d_G(v)$,在不致于引起混淆的情况下,也可简单地记作 $d(v)$.

例 1.2.4 在图1.2.4中,G_1 是 G 的子图.



G G_1

图 1.2.4

且在图 G 中,顶点 v_1 与边 e_1,e_7,e_9 都是相关联的.但 v_1 与边 e_2 不是关联的.而顶点 v_1 与 v_2 是邻接的,但 v_1 与 v_3 不是邻接的.边 e_1 与 e_2 是邻接的,但 e_1 与 e_4 不是邻接的.

关于各顶点的度数,我们有:$d(v_1)=3,d(v_2)=5,d(v_3)=3,$

$d(v_4)=4, d(v_5)=3$.

下面给出重要的定理.

定理 1.2.1 对于任意有限图 G,恒有:

$$\sum_{v \in V} d(v)=2 \cdot |E|$$

其中 V 为顶点集合,E 为边集合.

证明 图 G 中任何一条边均有两个端点,在计算各顶点的度数之和时,每条边均提供 2 度,从而 $|E|$ 条边共提供 $2 \cdot |E|$ 度,此即为图 G 的各顶点的度数之和.

此定理也经常称之为"握手定理",它有如下重要的推论.

推论 任意图 $G=(V,E)$,度数为奇数的顶点的个数为偶数.

证明 记 $V_1=\{v \in V \mid d(v)$ 为奇数$\}$, $V_2=\{v \in V \mid d(v)$ 为偶数$\}$,则 $V_1 \cap V_2=\varnothing$, $V_1 \cup V_2=V$,从而,由握手定理可知:

$$2|E|=\sum_{v \in V} d(v)=\sum_{v \in V_1} d(v)+\sum_{v \in V_2} d(v)$$

也必为偶数.但对每一 $v \in V_1$, $d(v)$ 均为奇数,只有偶数个奇数相加,其和才能成为偶数,故 $|V_1|$ 必为偶数.

如果 $d(v)$ 是奇数,我们就称 v 为**奇顶点**,如果 $d(v)$ 是偶数,则称 v 为**偶顶点**.

利用握手定理及其推论,我们可以得到如下结论:在一个集会中,和奇数个人握手的人的个数一定是偶数.这是因为,如果用顶点表示参加集会的人,用边表示两个人互相握手,则可得到一个图,此图即描述集会中互相握手招呼的数学模型.而和奇数个人握手的人即相当于图中的奇顶点,由推论即知,和奇数个人握手的人的个数必然是偶数.

类似地,利用推论还可解决如下的问题:设 A 是一个含有有限个正整数的集合,则 A 中所有的与 A 中奇数个数字没有素公因子的数字个数是偶数.用图来描述这个问题就是,A 中每一个数字对应一个顶点,两个顶点当且仅当相应的数字没有素公因子时有边,于是由推论即知上述结论成立.

对于有向图 $G=(V,E)$，有如下的定义.

定义 1.2.5 设 $G=(V,E)$是一个有向图，对 $v\in V$，称以 v 作为边的始点的次数之和为v 的出度，记作 $d^+(v)$；而称以 v 做为边的终点的次数之和为v 的入度，记作 $d^-(v)$；同时称以 v 做为边的端点次数之和为v 的度数（这与无向图是一致的），也记作 $d(v)$.

显然有：$d(v)=d^+(v)+d^-(v)$.

定理 1.2.2 设 $G=(V,E)$是一个有向图，且：

$$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\},|E|=m,$$

则
$$\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}d^-(v_i)=m.$$

证明 在有向图中，每条边均提供一个出度和一个入度，从而 m 条边共提供m 个出度和m 个入度，故$\sum_{i=1}^{n}d^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}d^-(v_i)=m$.

§1.3 道路与连通性

设图 $G=(V,E)$. 若 G 中连接同一对顶点的边数大于 1，则称这样的边为多重边. 有时也称其为平行边，而连接同一对顶点的边数称为连接该对顶点边的重数.

又若图 $G=(V,E)$中形如(v,v)，$v\in V$ 的边，即一条边的两个端点重合为一点时，称这样的边为环.

定义 1.3.1 没有环及多重边的图称为简单图.

定义 1.3.2 每一对不同的顶点均有一条边相连的无向简单图称为完全图. 特别，n 阶完全图记为K_n.

显然，n 阶完全图K_n 有 $C_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)$条边.

定义 1.3.3 若图 $G=(V,E)$的顶点集 V 的两个子集 V_1 与 V_2 满足：

(1) $V_1\cup V_2=V$； (2) $V_1\cap V_2=\varnothing$；

且 G 的每一条边均满足:该边的一个端点在 V_1 中,而另一个端点在 V_2 中,则称图 G 为二部图,并记作 $G=(V_1,V_2,E)$.

如果二部图 $G=(V_1,V_2,E)$中 V_1 的每一个顶点均与 V_2 的每一顶点邻接,则称这样的二部图为完全二部图.若 $|V_1|=m$,$|V_2|=n$,则将完全二部图记作 $G=(V_1,V_2,E)=K_{m,n}$.

例 1.3.1 图1.3.1中(a),(b)都不是简单图,而(c)是完全图 K_4,(d)是完全图 K_5,(e),(f)均是二部图,且(f)是完全二部图 $K_{2,3}$.

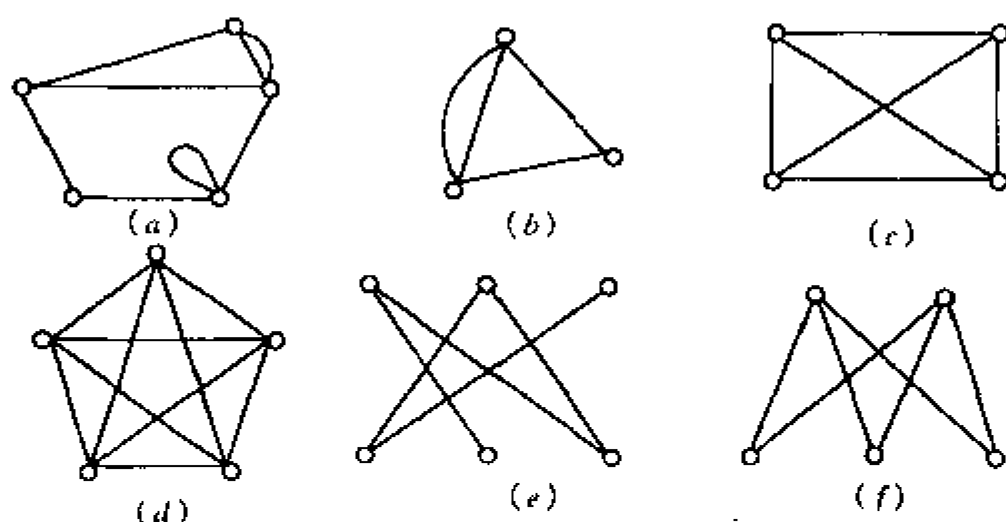


图 1.3.1

定义 1.3.4 一个图 G 的一条途径,是指一个顶点和边的交替序列:$\mu=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$,且边 e_i 的端点为 v_{i-1}和 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$.其中 v_0 和 v_k 分别称为途径μ 的起点和终点,而 μ 中边的数目 k 称为该途径的长.

定义 1.3.5 若图 G 中的一条途径$\mu=v_0e_1v_1e_2\cdots v_{k-1}e_kv_k$ 中所有顶点均不相同(此时也必有所有边都不相同),则称其为一条道路.以 v_0 为起点,v_k 为终点的道路也称为 $v_0—v_k$ 道路.

若道路 μ 中 $v_0=v_k$,则称 μ 为一条回路(或称为一个圈).

我们特别称圈与圈的边的不重并为环路.显然,圈是环路,但圈一定是连通的,而环路则不一定是连通的,关于连通,我们将在下面

给出定义.

有时为了方便起见,我们只用顶点来表示途径、道路、圈或环路.

下面我们看一个例子.

例 1.3.2 图1.3.2中所示的图 G:$\mu = v_1v_2v_7v_6v_4$ 是一条途径,也是一条道路;但 $\mu = v_1v_2v_3v_7v_2v_1$ 只是一条途径,它不是一条道路;而 $C_1 = v_1v_2v_8v_1$ 与 $C_2 = v_4v_5v_6v_4$ 均是圈.

可将圈 C_1, C_2 简记为 $v_1v_2v_8$ 与 $v_4v_5v_6$,而 $C_1 \cup C_2$ 即为一个环路,显然它不是连通的.但若取圈 $C_3 = v_2v_3v_7$,则 $C_1 \cup C_3$ 也是环路,显然它仍是连通的.

定义 1.3.6 设 u, v 是图 $G=(V, E)$的两个顶点,若 G 中存在一条 u—v 道路,则称 u 和 v 是连通的;若图 G 的任意两个顶点均连通,则称图 G 是连通图;否则称 G 是非连通的.

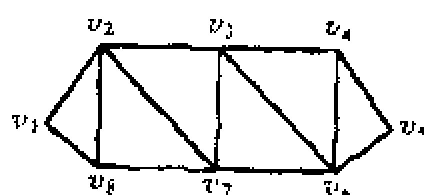


图 1.3.2

若以符号:$u \equiv v$ 表示顶点 u 和 v 是连通的,那么这种顶点之间的"连通"关系是一个等价关系,即它满足:

1. $u \equiv u$(反身性);

2. $u \equiv v \Rightarrow v \equiv u$(对称性);

3. $u \equiv v$ 且 $v \equiv w \Rightarrow u \equiv w$(传递性)

这样,等价关系"$u \equiv v$"便确定了顶点集 V 的一个分类:它把 V 分成若干非空子集 $V_1, V_2, \cdots, V_s$ 的不交并,使得当且仅当两个顶点 u 和 v 属于同一个子集 V_i 时,它们才是连通的.

我们称 G 的子图 $G(V_1), G(V_2), \cdots, G(V_s)$ 为 G 的连通分支或简称为分支,分支的个数记为 $k(G)$.

显然,当且仅当 G 只有一个分支时,即 $k(G)=1$,G 是连通的.而当分支个数大于 1 时,即 $k(G)>1$,G 为非连通图(或称为分离图).

例 1.3.3 图1.3.3中,(a)为连通图,(b)为有 3 个分支的非连

通图.

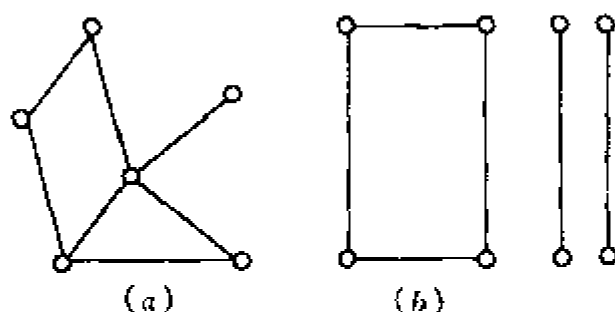


图 1.3.3

定义 1.3.7 若连通图 G 中存在一条满足如下条件的途径 C，C 通过 G 的每条边一次且仅一次，并最后返回出发点，则称 C 为欧拉回路(或欧拉圈).

定义 1.3.8 顶点度数均为偶数的图称为欧拉图.

定理 1.3.1 连通的欧拉图一定存在一条欧拉回路.

证明 不失一般性，可设从 G 的某一顶点 v_0 出发，边数最多的一条回路(或称为最大回路)是

$$C = v_0 v_1 v_2 \cdots v_{m-1} v_o.$$

下证 C 即是图 G 的欧拉回路. 我们将给出一个构造性的证明，即在证明过程中，提供一种求欧拉回路的算法.

假定 C 不是欧拉回路，则我们断言，C 中至少有一顶点 v，使该点的度数大于回路 C 中经过顶点 v 的边数(事实上，若 C 中所有顶点 v 的度数均等于 C 中经过该顶点的边数，则因 C 不是欧拉回路，于是必有不属于回路的 C 的一条边，且此边的两个端点也不属于 C，从而这条边必不能与回路 C 连通，这与 G 是连通图的假设矛盾.

于是 C 中至少存在一点 v，使得回路 C 过 v 的边数小于 $d(v)$. 从而由 v 出发至少有一条边 $e_1=(v, v'_1)\notin C$，若 $v'_1=v$，则 e_1 添加于 C 即可得到一个新的回路，这与 C 为最大回路矛盾. 下设 $v\neq v'_1$. 于是有 $e_2=(v'_1, v'_2)\notin C$，依次下去，由 G 的连通性，最后必有 $e_k=(v'_{k-1}, v'_k)\notin C$，而 $v'_k=v$，即回路 $C'=vv'_1\cdots v'_{k-1}v$ 是 G

的一条异于C的新回路.从而C与C'可合成一个欧拉回路:$C_1 = v_0v_1\cdots v_{i-1}vv'_1\cdots v'_{k-1}vv_{i+1}\cdots v_{m-1}v_0$(其中$v = v_i$)但这与$C$是$G$的最大回路的假设相矛盾.故$C$是欧拉回路.见图1.3.4.

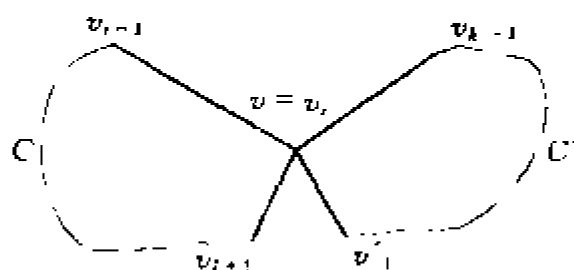


图1.3.4

推论 如果连通图$G=(V,E)$恰有两个顶点的度数是奇数,则存在一条以这两个顶点(其中任何一个均可做为始点或终点)为端点的,包含G的所有边的道路.称这样的道路为欧拉道路.

证明 设u,v是G中仅有的两个度数为奇数的点,并将图G再填加一条边$e=(u,v)$,则可得一个新图G',显然G'的所有顶点的度数均为偶数,即图G是欧拉图.

由定理1.3.1知,G'存在一条欧拉回路:

$C' = uv_1v_2\cdots v_{n-1}v_nvu$

其中$(u,v_1),(v_1,v_2),\cdots\cdots,(v_n,v)$是图$G$的全部边,去掉回路中的边$(v,u)$,即得图$G$中一个从$u$到$v$的欧拉道路.见图1.3.5.

定理1.3.1及推论反映了某类图的一个重要性质:即一笔画问题.所谓"一笔画"是指某个图可用一笔画成(中间笔不能离开纸)而没有重复的笔划(顶点可以重复经过).一个图是否可以一笔画成,是由该图顶点的度所决定的,对此,我们可作如下分析:

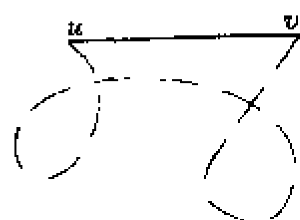


图1.3.5

假设图G可以一笔画成,且有一个起点和一个终点,而G中其余的顶点均可看作是"经过"的点,正如一个旅程中的中转站,凡是作

为"中转站"的点,都必然有"到达"与"离开"两种情形,至于经过多少次的数目是无关紧要的,只要保持"到达"与"离开"的次数相同即可.由于规定不能走重复的路线,故每次"到达"与"离开"均用不同的边来表示.这样,每一个作为"中转站"的点必然具有偶数条边.换言之,一个"经过"的顶点,必须是度数为偶数的点,只有作为起点和终点的顶点的度数,才可能为奇数.

通过以上的讨论,我们可以得出关于"一笔画"问题的如下结论:

一个连通图 G 可以一笔画出的充分且必要条件为图 G 恰有两个奇度数的顶点(这两个顶点中,一个为始点,另一个为终点);或 G 为欧拉图(此时,始点和终点为同一个顶点,且其中任意一个顶点均可作为始点).

现在,我们即可给出关于哥尼斯堡七桥问题的完美解答:

因为图 1.1.2 中,顶点 A 的度数为 5,顶点 B,C,D 的度数均为 3,即四个顶点均为奇度数点,故它不能一笔画出,从而,所要寻求的散步路线是不存在的.

§1.4 图的矩阵表示法

一、邻接矩阵

矩阵是研究许多数学问题和应用问题的一种有力工具,对于图论的研究更是如此.特别是在利用计算机来研究有关图的算法时,首先遇到的问题就是如何使计算机能识别图,而利用矩阵来识别,就是其中一种有效的方法.

定义 1.4.1 我们假定 G 不含多重边.

设图 $G=(V,E)$,且 $|V|=n$,构造矩阵

$$A=(a_{ij})_{n\times n},a_{ij}=\begin{cases}1,(v_i,v_j)\in E;\\0, \quad 其他\end{cases}$$

其中,$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,

则称矩阵 A 是图 G 的邻接矩阵.

下面看一个例子.

例 1.4.1

图1.4.1所示的图 G 的邻接矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

$$\quad\ v_1\ \ v_2\ \ v_3\ \ v_4\ \ v_5$$

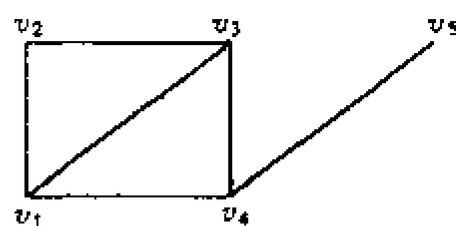


图 1.4.1

若给出一个图 G 的邻接矩阵,则给出了该图的全部信息,从而图的若干性质即可通过矩阵运算而获得.

改变图 G 的顶点排列次序,即相当于对图 G 的邻接矩阵 A 所对应的行与列进行调接.

从图 G 的邻接矩阵 A 的定义中,我们可获得图 G 的邻接矩阵有如下性质:

(1)A 是一个主对角线上的元素皆为 0,其余元素或为 0 或为 1 的对称矩阵,且 A 的任一行(或列)的元素之和都恰恰等于其相应顶点的度数.

(2)记 $B=A^2=(b_{ij})_{n\times n}$,则矩阵 $B=A^2$ 的主对角线上元素:

$$b_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{ki}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=d(v_i).$$

即 b_{ii} 恰为相应顶点 v_i 的度数.

(3)对于任意非负整数 k,$A^k=(a_{ij}^{(k)})$中的元素 $a_{ij}^{(k)}$等于图 G

中连结顶点 v_i 与 v_j 的长为 k 的途径的数目.

证明 对 k 作归纳法.

当 $k=0$ 时,$A^0=I$ 为 n 阶单位矩阵.从任一顶点 v_i 到自身有一条长为 0 的途径;而任何两个不同的顶点之间没有长为 0 的途径.故当 $k=0$ 时,定理成立.

归纳假设 $k=s$ 时,定理成立.

下证 $k=s+1$ 的情形.

因为 $A^{s+1}=AA^s$,故 $a_{ij}^{(s+1)}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}a_{lj}^{(s)}$;由于 a_{il} 是连结顶点 v_i 与 v_l 的长为 1 的途径的数目,$a_{lj}^{(s)}$ 是连结顶点 v_l 与 v_j 的长为 s 的途径的数目.

所以:$a_{il}a_{lj}^{(s)}$;表示由顶点 v_i 先经过一条到 v_l 的长为 1 的途径,再经过一条由 v_l 到 v_j 的长为 s 的途径,这样的途径的总数目.对 l 求和即表示所有连结 v_i 与 v_j 的长为 $s+1$ 的途径的数目.

由归纳法原理,定理得证.

(4)记 $C=A^3=(a_{ij}^{(3)})$,则

$(a_{ii}^{(3)})$是图 G 中以顶点 v_i 为一个顶点的三角形数目的两倍.

证明 连结顶点 v_i 与其自身的长为 3 的途径只能是以 v_i 为一个顶点的三角形,而每一个这样的三角形按两种不同的方向对应于两条不同的途径.

例 1.4.2 对于图1.4.1所示的图 G 的邻接矩阵 A,有:

$$A^2=\begin{pmatrix}3&1&2&1&1\\1&2&1&2&0\\2&1&3&1&1\\1&2&1&3&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}\qquad A^3=\begin{pmatrix}4&5&5&6&1\\5&2&5&2&2\\5&5&4&6&1\\6&2&6&2&3\\1&2&1&3&0\end{pmatrix}$$

对于有向图 $G=(V,E)$,也可类似无向图定义其邻接矩阵.

$$A=(a_{ij})_{n\times n},a_{ij}=\begin{cases}1, 若\overrightarrow{(v_i,v_j)}\in E;\\0, \quad 其他.\end{cases}$$

显然,有向图的邻接矩阵 A 不一定是对称矩阵了,但它有如下性质:

(1)A 的第 i 行的元素之和恰为顶点 v_i 的出度 $d^-(v_i)$;A 的第 j 列的元素之和恰为顶点 v_j 的入度 $d^-(v_j)$;

(2)若记 $AA'=C=(c_{ij})_{n\times n}$,$A'$ 表示矩阵 A 的转置矩阵,则:

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$ 表示图 G 中满足 (v_i,v_k) 与 (v_j,v_k) 均属于 E 的这样的顶点 v_k 的数目,即以 v_k 为终点,且同时以 v_i、v_j 为始点的 v_k 的数目.

(3)若记 $A'A=D=(d_{ij})_{n\times n}$,则

$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}$ 表示图中分别以 v_i、v_j 为终点,但有相同始点 v_k 的这样的顶点 v_k 的个数.

例 1.4.3 对于图1.4.2所示的有向图 G 邻接矩阵

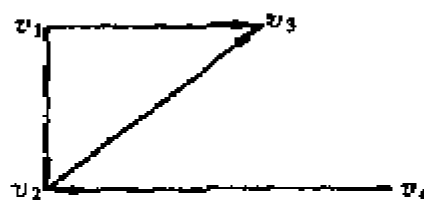


图 1.4.2

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},AA'=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&1\end{pmatrix},A'A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

读者可自行验证性质(1)、(2)、(3).

二、关联矩阵

定义 1.4.2 设图 $G=(V,E)$,$v\in V$,称 G 中所有与顶点 v 关联的边的集合为顶点 v 的关联集,记作 $S(v)$.

例 1.4.4 如图1.4.3所示的图 G 中,顶点的关联集分别为:

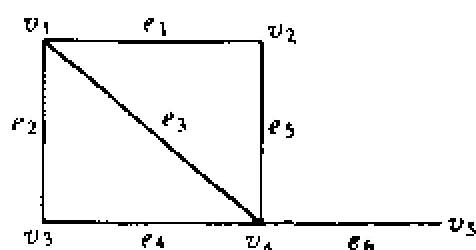


图 1.4.3

$S(v_1)=\{e_1,e_2,e_3\}$;$S(v_2)=\{e_1,e_5\}$;$S(v_3)=\{e_2,e_4\}$;
$S(v_4)=\{e_3,e_4,e_5,e_6\}$;$S(v_5)=\{e_6\}$.

定义 1.4.3 设图 $G=(V,E)$,且 G 为无环图
$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,即$|V|=n$;
$E=\{e_1,e_2,\cdots,v_m\}$,即$|E|=m$.

$$\text{令}\quad m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若边 } e_j \text{ 与顶点 } v_i \text{ 关联;}\\ 0, & \text{若边 } e_j \text{ 与顶点 } v_i \text{ 不关联.}\end{cases}$$

则称矩阵 $M=(m_{ij})_{n\times m}$为图 G 的关联矩阵,或称 M 为图 G 的顶点关联矩阵.

例 1.4.5 图1.4.3所示的图 G 的关联矩阵:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\end{matrix}$$

$$e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ e_5\ e_6$$

这里用行表示顶点,用列表示边,即矩阵 M 右边的 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,表示图 G 的 5 个顶点,M 下边的e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6 表示图

G 的 6 条边.

其中 M 第一行标有 1 的那些元素,表示与顶点 v_1 关联的边,即顶点 v_1 的关联集 $S(v_1)=\{e_1,e_2,e_3\}$;M 第二行中标有 1 的那些元素,表示与顶点 v_2 关联的所有边,即顶点 v_2 的关联第 $S(v_2)=\{e_1,e_5\}$,等等.

由于一个图的关联矩阵的行完全刻划了该图的相应顶点的关联情况,因此,关联矩阵的 n 个行给出了该图的全部关联第.

因为关联矩阵的列表示的是图的边,且图 G 的每一条边均有且仅有两个端点,故在关联矩阵的每一列中恰好有两个 1,其余的元素全为 0.

又由于一个图的关联矩阵,完全描述了该图的全部顶点和边的关联关系,而一个图的最基本的内容就是这种顶点与边的关联关系,因此,一个图的关联矩阵可以用来描述图的许多基本特征:

(1)关联矩阵的每一列恰好有两个元素为 1,它表示与某条边相关联的两个顶点;

(2)关联矩阵的每行中元素 1 的个数恰与对应顶点的度数相一致;

(3)若关联矩阵的某一行元素全为 0,则表示该行对应的顶点为孤立点;

(4)交换一个关联矩阵的某两行或两列,相当于对同一图的顶点和边重新标号.

三、图的同构

定义 1.4.4 设 $G_1=(V_1,E_1)$ 和 $G_2=(V_2,E_2)$ 是两个无向图.若这两个图的顶点集 V_1 和 V_2,边集 E_1 和 E_2 之间都分别建立了一一对应关系,并且满足:图 G_1 中两顶点的关联边对应于图 G_2 中相应顶点所关联的边,即 $\forall u_1,v_1\in V_1$,若 $u_1\rightarrow u_2,v_1\rightarrow v_2$,则当 $(u_1,v_1)\in E_1$ 时,必有 $(u_1,v_1)\rightarrow(u_2,v_2)$,其中 $u_2,v_2\in V_2$,则称图 G_1 与图 G_2 是同构的.

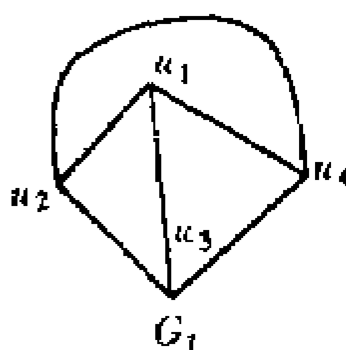


图 1.4.4

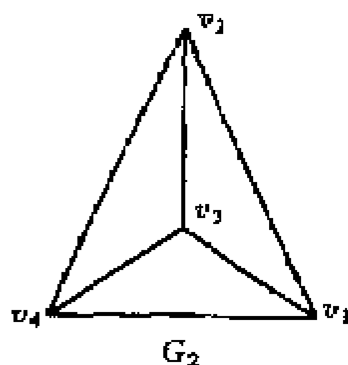


图 1.4.5

例 1.4.6 在图1.4.4和图1.4.5所示的图 G_1 与图 G_2 中，若规定：

1. 顶点之间的对应关系为：

$u_1 \to v_2; u_2 \to v_4; u_3 \to v_3; u_4 \to v_1;$

2. 边之间的对应关系为：

$(u_1, u_2) \to (v_2, v_4)$； $(u_1, u_4) \to (v_2, v_1)$； $(u_2, u_3) \to (v_4, v_3)$；
$(u_3, u_4) \to (v_3, v_1)$； $(u_1, u_3) \to (v_2, v_3)$； $(u_2, u_4) \to (v_4, v_1)$.
则图 G_1 和图 G_2 是同构的.

所谓两个图同构，指的是在两个图之间建立了一个保持顶点与边间关联关系的一个一一对应.虽然有时两个图从形状上看不见得一致，甚至看起来可能会差异很大，但它们的本质(即顶点与边的数目及顶点与边之间的关联关系)是一样的，即它们的拓朴结构是一样的.所谓拓朴结构一般是指：设图的顶点可以任意挪动位置(在不改变原图的顶点与边之间的关联关系的前提下)，图的边是完全弹性的，只要在不拉断的条件下，可任意拉长或缩短，从而使一个图形可以变形为另一个图形.

利用图的关联矩阵，我们可用如下的方法来判断两个图是否同构的：

设图 G_1 的关联矩阵为 M_1，图 G_2 的关联矩阵为 M_2，若经过一系列的(有限次)行、列置换可由 M_1 得到 M_2，则图 G_1 与图 G_2 同构.

例 1.4.7 证明图1.4.6所示的图 G_1 与图 G_2 同构.

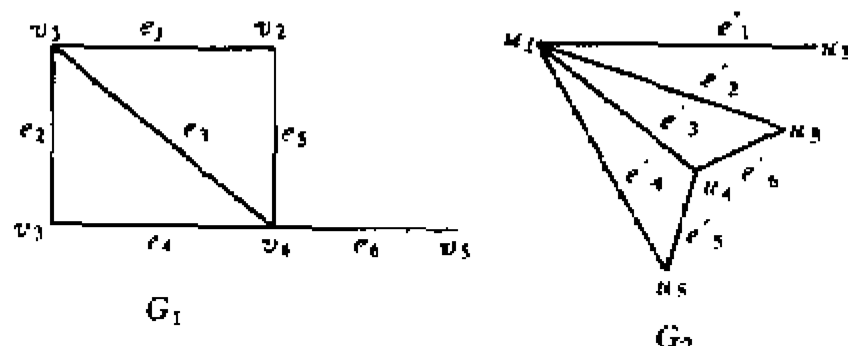


图 1.4.6

证明 图 G_1 与图 G_2 的关联矩阵分别为

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

下面对 M_1 进行行列置换:

$$M_1 \xrightarrow{\text{交换 } 3,5 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换 } 2,3 \text{ 行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{\text{交换 }1,4\text{ 行}}\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&0&0&0&0&1\\1&0&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换 }2,5\text{ 列}}\begin{bmatrix}0&1&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{交换 }1,6\text{ 列}}\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&1\\0&0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$= M_2.$$

故由前面的讨论知图 G_1 与图 G_2 同构.

§1.5 应用问题举例

例 1.5.1 若我方两名军事人员和敌方两名军事人员同到某一现场视察,途中要经过一条河.但只有一只小船,且每次最多只能乘坐两个人.为了安全起见,当敌我双方人员同时在场时,应避免出现我方人员少于敌方人员的情况.问应如何安排渡河的方案?

为讨论方便起见,我们用记号 $L(m,n)$或 $v(m,n,l)$表示河的左岸有我方人员 m 人,敌方人员 n 人的状态;而 $R(m,n)$或 $v(m,n,r)$表示河的右岸我方人员 m 人,敌方人员 n 人的状态.显然,当左岸的状态为 $L(m,n)$时,右岸的状态为 $R(2-m,2-n)$.

现将全部允许的状态列举如下

$$v_1=L(2,2);v_2=L(2,1);$$
$$v_3=L(1,1);v_4=L(2,0);$$
$$v_5=L(0,2);v_6=L(0,1);$$
$$v_7=R(2,2);v_8=R(2,1);$$
$$v_9=R(1,1);v_{10}=R(2,0);$$
$$v_{11}=R(0,2);v_{12}=R(0,1).$$

需要注意的是,这里没有出现 $L(1,0)$ 与 $R(1,0)$ 的状态.这是因为,这两种状态表面看我方人员多于敌方人员,但它的对岸则会出现 $R(1,2)$ 和 $L(1,2)$ 的状态,显然这是不允许的.

渡船的全过程可以看作是状态的转移,则状态之间的关系,可用图 1.5.1 来表示.其中点表示状态,状态间的转移用连线表示,比如从 $L(2,2)$ 可以迁移到 $R(0,1)$,这只要从河左岸运一名敌方人员到右岸即可,我们用连线上的符号(0,1)来表明这种迁移.

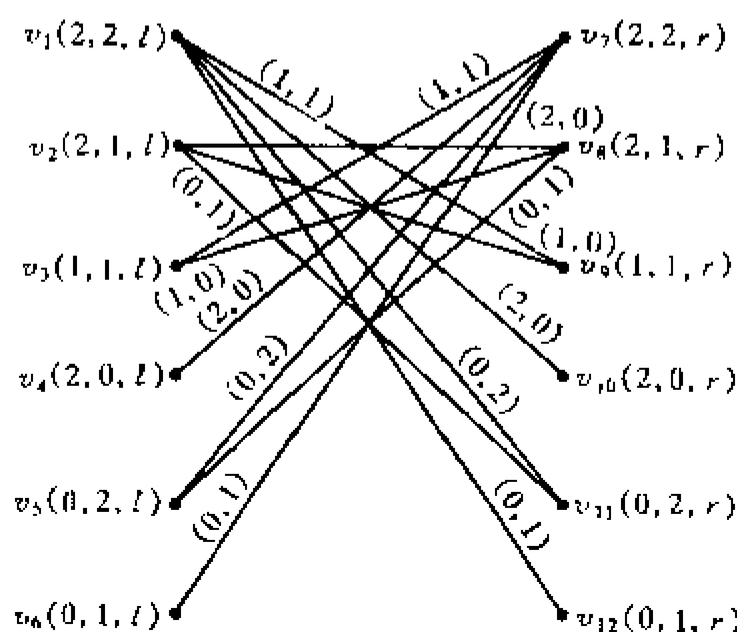


图 1.5.1

显然状态之间的关系是可逆的、对称的.换句话说,即 $v_1=L(2,2)$ 可以转化为 $v_{12}=R(0,1)$,而 v_{12} 也可以转化为 v_1,等等.

于是原问题归结为从图 1.5.1 找一条从 v_1 到 v_7 的路径，且每一条路径都表达一种渡船的方案.

为此，我们写出图 1.5.1 的邻接矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_1 & 0\end{pmatrix}_{12\times 12},$$

其中：

$$A_1=\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

且顶点的次序排列是按下标的自然次序，即：$v_1,v_2,\cdots v_{12}$.

显然有：

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1^2 & 0\\ 0 & A_1^2\end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix}A_1^2 & 0\\ 0 & A_1^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & A_1^3\\ A_1^3 & 0\end{pmatrix},$$

……

现在归结为，求 $A_1^3,A_1^5,\cdots$，并注意什么时候出现 $a_{11}^{(k)}\neq 0$，且 k 为奇数时的 $a_{11}^{(k)}$ 即为所求的由 v_1 到 v_7 的途径数目.

由于 $A_1^{s+1}=A_1^sA_1$，所以 A_1^{s+1} 中第一行元素等于 A_1^s 的第一行元素去乘矩阵 A_1^s. 而我们只是关心 A_1^s 的第一行元素，故可只求出每一个 A_1^s 中的第一行元素即可.

我们用 $\alpha(k)$ 来表示 A_1^k 的第一行元素，则依次可得：

$$\begin{cases}\alpha(1)=(0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1).\\ \alpha(2)=\alpha(1)\cdot A_1=(4\ 2\ 0\ 0\ 0\ 0)\end{cases}$$

且这里 $\alpha(2)$在矩阵 A^2 的左上角的矩阵 ${A_1}^2$ 中，即若记 $A^2=(\bar{a}_{ij}^{(2)})$，则 $\bar{a}_{12}^{(2)}=2\neq 0$，这表明由 v_1 到 v_2 有两条途径，且由实际相乘过程可知，这两条路径分别是为：$v_1\to v_9\to v_2$，$v_1\to v_{11}\to v_2$.

事实上，由

$$\alpha(1)A_1=(0\ 0\ \overset{v_9}{①}\ 1\ \overset{v_{11}}{①}\ 1)\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\1&①&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&①&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\alpha(2)=(4\quad \overset{v_2}{②}\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0)$$

即知.

类似可得

$$\alpha(3)=\alpha(2)A_1=(0\ 2\ 6\ 4\ 6\ 4)$$

且由 v_2 出发，途中不再经过 v_1 的话，只能到达 v_8，即 $v_2\to v_8$，其过程可表示为：

$$\alpha(2)A_1=(4\ \overset{v_2}{②}\ 0\quad 0\quad 0\quad 0)\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&①&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\alpha(3)=(0\quad \overset{v_8}{②}\quad 6\quad 4\quad 6\quad 4)$$

$$\alpha(3)A_1=(0\ \overset{v_8}{②}\ 6\quad 4\quad 6\quad 4)\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&①&0&①&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\alpha(4)=(20\quad 14\quad \overset{v_3}{②}\quad 0\quad \overset{v_5}{②}\quad 0)$$

即由 v_8 出发,有 2 条途径,分别为:$v_8\to v_3$,$v_8\to v_5$,最后

$$\alpha(4)A_1=(20\ 14\ \overset{v_3}{②}\quad 0\quad \overset{v_5}{②}\quad 0)\begin{pmatrix}0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&1&0\\1&①&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\1&①&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\alpha(5)=(\overset{v_7}{④}\quad 18\quad 34\quad 20\quad 34\quad 20).$$

从而,得到从 v_1 到 v_7 的 4 条途径如下:

①$v_1\to v_9\to v_2\to v_8\to v_3\to v_7$,

②$v_1\to v_9\to v_2\to v_8\to v_5\to v_7$,

③$v_1\to v_{11}\to v_2\to v_8\to v_3\to v_7$,

④$v_1\to v_{11}\to v_2\to v_8\to v_5\to v_7$.

这 4 条途径也可由见图 1.5.2 所示的过程表示:

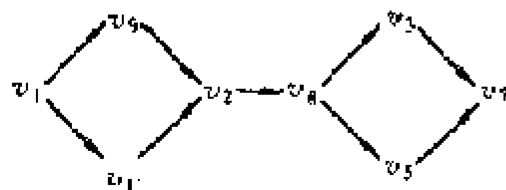


图 1.5.2

前面讨论的方法还可以进一步转化.我们用一个顶点来表示 (h,k) 状态,即我方 h 人,敌方 k 人的一种状态,而不区分它究竟是左岸还是右岸的情形.又因为河的左岸和右岸是交替出现的,故状态迁移图可用图 1.5.3 来表示.

需要指出的是,v_2 点有一从 v_2 点出发到自身的环,它表示从(2,1)状态回到(2,1)状态,但已从河的一岸的(2,1)状态迁移到河另一岸的(2,1)状态.这样的环我们称其为自环,或就简称为环.且图 1.5.3 是无向图,但实际上它的每条边都可以看成是双向的.

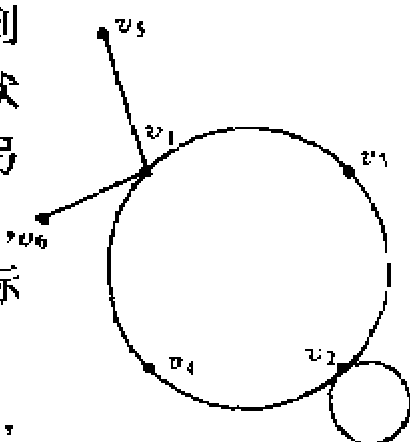


图 1.5.3

于是,从点 $v_1(2,2)$ 出发,到点 $v_6(0,1)$,便是由此岸的(2,2)状态转移到对岸的(0,1)状态.从而问题归结为从顶点 $v_1(2,2)$ 出发,经过奇数步返回 $v_1(2,2)$ 的途径.

显然,对于河的一岸来说,只有 v_1,v_2,v_3,v_4 是允许的,故可将图 1.5.3 改为从图 1.5.4 中 v_1 出发,经奇数步重返 v_1 的路径.

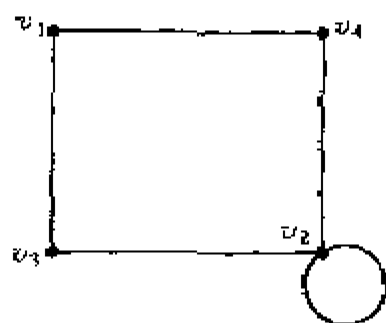


图 1.5.4

通过观察图 1.5.4,可以给出问题的解答,分别为:

①$v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_2 \to v_4 \to v_1$;

②$v_1 \to v_4 \to v_2 \to v_2 \to v_3 \to v_1$;

③$v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_2 \to v_4 \to v_1$;

④$v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_2 \to v_3 \to v_1$.

或表示为图 1.5.5.

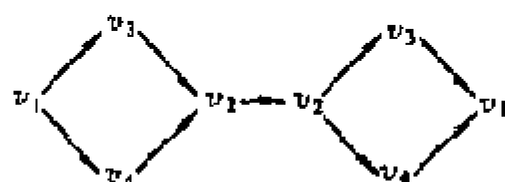


图 1.5.5

通过矩阵的计算,也可得出相同的结果.为此,可令

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix}$$

$$\quad v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4$$

计算 $A^k(k=3,5,\cdots)$,直到出现 $a_{11}^{(k)} \neq 0$ 时为止.按照前面给出的计算方法,亦可得出同样的结果.

例 1.5.2 任意6个人在一起.则这 6 个人中,若不是有 3 个人彼此互相认识,必然是有 3 个人互相不认识.

证明 将这 6 个人分别用 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 这样 6 个顶点来表示.若 v_i 与 v_j 两个人互相认识,则将顶点 v_i 与 v_j 用实线相连,否则用虚线相连.

显然,对于任意两个人来说,或者他们两人互相认识,或者他们互相不认识,两者必居其一.所以,这 6 个顶点中任何一点,与其他任何一点必有一连线(不论实线或虚线),即该图构成一个 6 阶完全图.

于是问题变为,由上述方法所得到的一个 6 阶完全图中,至少存

在一个实线三角形或虚线三角形.

为此,可先任取一顶点 v_l,由抽屉原则知,v_l 与其他 5 顶点的联线中,至少有 3 条同为实线或同为虚线.

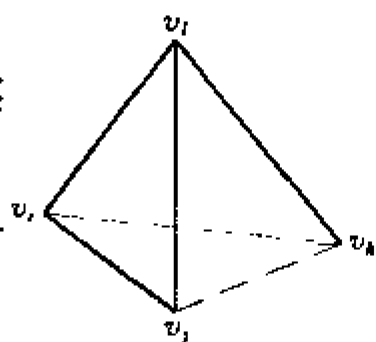


图 1.5.6

不妨假设同为实线,而这 3 条实线的另一端点分别为 v_i, v_j, v_k. 下面考虑由顶点 v_i, v_j, v_k 所构成的三角形. 若此三角形是虚线三角形,显然表明 v_i, v_j, v_k 之间互不相识,则问题得到解决. 若此三角形不是虚线三角形,则至少有一条边为实线,不妨设此边为 (v_i, v_j). 则此时三角形 $v_iv_jv_l$ 便是一个实线三角形(如图 1.5.6 所示). 这表明 v_i, v_j, v_l 三人相互彼此认识.

习题一

1. 画两个 5 阶图,使顶点的度分别是:

(1) 2,2,2,2,2;　　(2) 3,3,4,5,5.

2. 设图　$G=(V,E)$, $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$,　$E=\{(v_1,v_2), (v_2,v_2), (v_2,v_4), (v_4,v_5), (v_3,v_4), (v_1,v_3)\}$.

(1) 画出 G 的图形;

(2) 求 G 中各顶点的度数,并由此验证握手定理;

(3) 求出 G 中奇数度顶点的个数,并验证它满足握手定理的推论;

(4) 指出图中的平行边,环,孤立点,悬挂顶点(即度为 1 的顶点),悬挂边(即与悬挂顶点相关联的边);

(5) G 是简单图吗?

3. 设 $G=(V,E)$是一个 n 阶连通图,且$|E|=m$,证明

(1) $m \geqslant n-1$;

(2) $m > n-1$,则 G 中至少有一个面;

(3) 若 $m=n-1$,则 G 中至少有一个顶点的度为奇数.

4. 若图 G 中顶点度数的最小值≥ 2,证明 G 中至少有一个圈.

5. 已知图 G 有 10 条边,2 个 2 度顶点,2 个 3 度顶点,1 个 4 度顶点,其余顶点的度数都是 1,问 G 中有多少个 1 度顶点?

6. 若 G 中有 12 条边,且 G 中 3 度顶点有 6 个,其余顶点的度数均小于 3,问图 G 中至少有几个顶点?

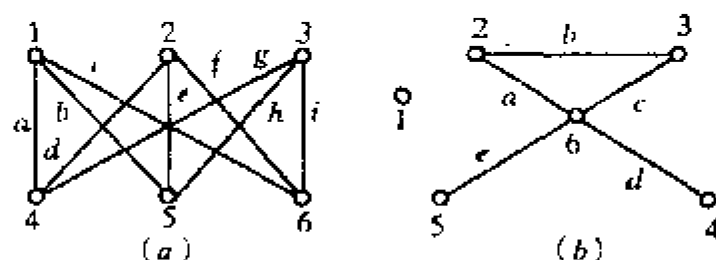
7. 画一个欧拉图,使它具有:

(1) 偶数个顶点,偶数条边; (2) 奇数个顶点,奇数条边;

(3) 偶数个顶点,奇数条边; (4) 奇数个顶点,偶数条边.

8. 写出题图 1.1 中各图的邻接矩阵与关联矩阵.

9. 写出题图 1.1(b)中每一个顶点的关联集.



题图 1.1

10. 试证下列两图同构,见题图 1.2.

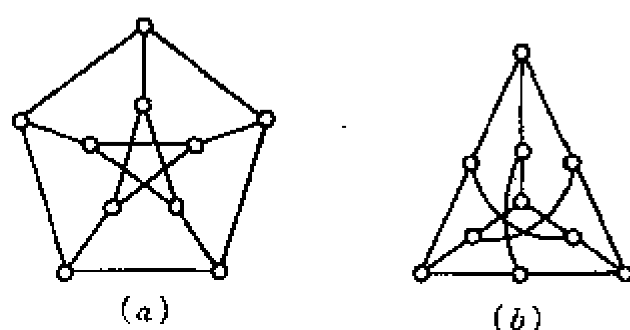
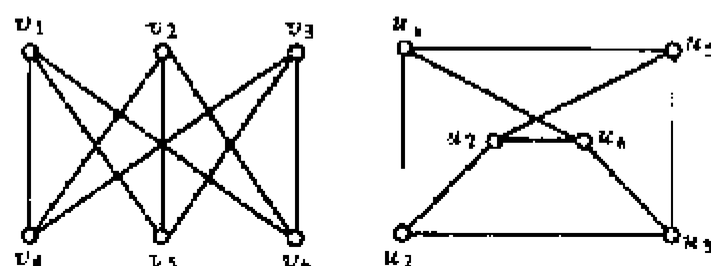


图 1.2

11. 试证题图 1.3 中两图同构.



题图 1.3

12. 求一条过哥尼斯堡的七座桥的路线，要求重复的次数尽量少.

13. 证明　设 G 是简单图，且 $|V|=n$，$|E|=m$，若满足 $m>C_{n-1}^2$，则 G 是连通的.

14. 设 G 为连通的简单图，但 G 不是完全图，则一定存在如下的三个顶点 u,v，和 w，满足：$(u,v)\in E$，$(u,w)\in E$，但 $(u,w)\notin E$，其中 $G=(V,E)$.

15. 某甲挑一担青菜，带一条狗、一只羊赶路，途中经过一条小河，但只有一只小船，且每次只容许某甲带狗、羊、菜三者其中的一种过河. 要求当某甲不在场时，应避免狗和羊或单和菜在一起，求过河的方案.

16. 有 3 个瓶子，容量分别为 8 L，5 L，3 L. 若容量 8 L 的瓶子装满了液体，试利用这 3 个瓶子把这 8 L 液体均分.

17. 设有敌我双方的各两名人员同到某地勘察，途中要经过一条河. 但只有一只小船，且每次至多能乘坐两人. 若要求不能让两名敌方人员单独在一起，求渡河的方案.

18. 某山区山上的一个生产队要用拖拉机运两头牛、三只羊下山. 拖拉机下山时只能运载两只牲口（牛、羊均可），上山时只能运载一只. 驾驶员不在场时若将牛、羊放在一起，则要求羊的头数超过牛的头数. 驾驶员在场时则无限制. 求运载的方案.

19. 试证，任意 10 个人之中必有 3 个人互相认识，或者有 4 个

人互相不认识，两者必居其一.

20. 有一个人带着狼、羊和白菜过河，但只有一只小船，人每次渡河只能带一样东西(狼、羊、白菜均可). 如果人不在，狼要吃羊，羊要吃白菜. 问这个人应怎样安排渡河，才能保证将三样东西都安全带过河?

第二章　树

§2.1　树的概念

定义 2.1.1　没有回路的连通图称为树，树中的边称为树枝，树中度数为1的顶点称为树叶，度数大于 1 的顶点称为分支点. 每个分支都是树的分离图称为森林.

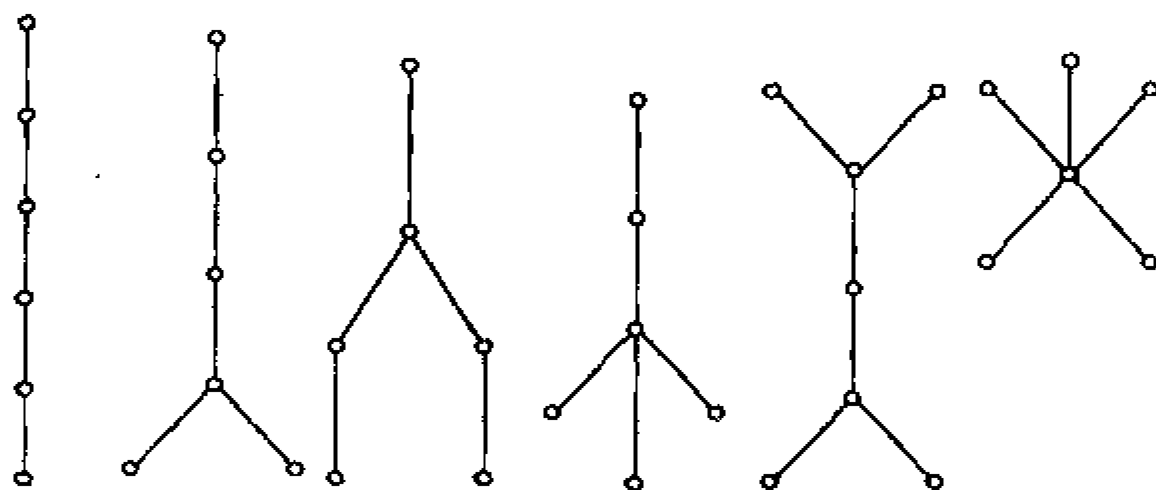


图2.1.1

例 2.1.1　图2.1.1中给出了有 6 个顶点的各种不同的树.

定义 2.1.2　图2.1.2中图 G 的连通的无回路子图称为 G 的树. 若图 G 的树 T 包含 G 的所有顶点，则称树 T 为图 G 的一棵生成树(成支撑树).

图 G 的生成树 T 中的边称为树枝，而属于 G 不属于 T 的边称为连枝(或弦).

树 T 的一个连通子图(仍为一撑树)称为 T 的子树.

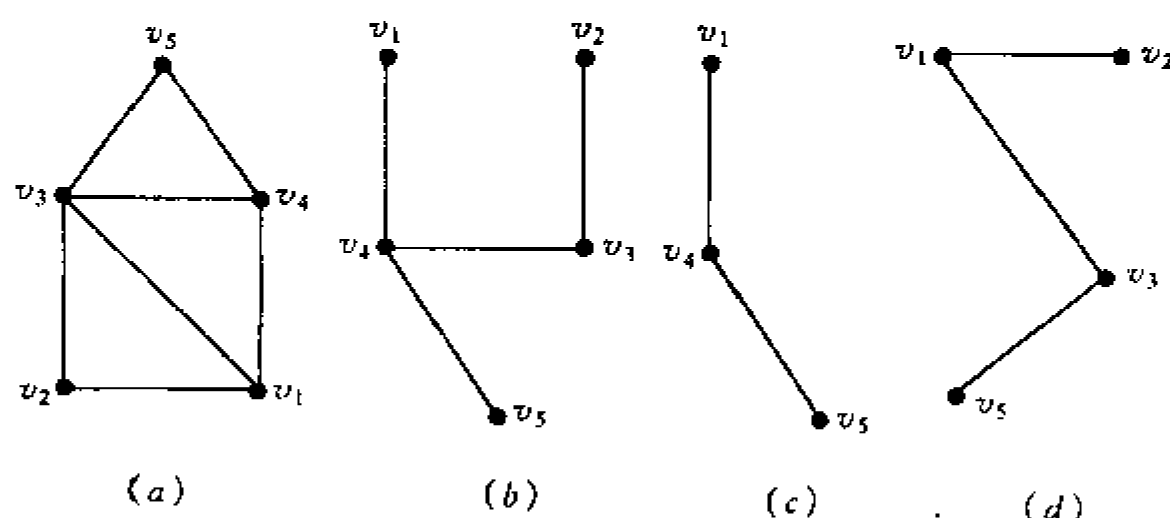


图 2.1.2

例 2.1.2

对于图2.1.2(b)、(c)、(d)均为(a)的树，但只有(b)是(a)的一棵生成树，(c)为(b)的一棵子树.

下而看几个关于树的实际应用问题.

例 2.1.3 现有四个银币，已知其中有三个一定是真的，最多只可能有一个是假的. 而真假的判定标准在于真银币的重量完全符合标准，假银币的重量一定不符合标准(或轻或重). 现用一架天平设法对这四个银币的真假作出判断.

我们用 a,b,c,d 分别表示四枚银币，并用记号"$x:y$"表示将 x,y 放在天平上作比较的意思.

如图 2.1.3 所示. 这里树叶(即度为 1 的点)即为判断的结论.

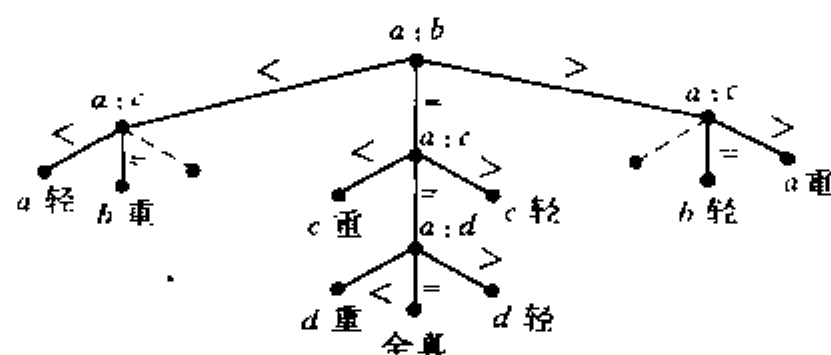


图 2.1.3

这里 $a:b$ 左边的"<"号表示在 $a<b$ 的前提下继续比较 a 与 c,而此时 $a>c$ 不可能发生,故图中的虚线即表示不可能发生的情形.

上面我们把作出判决的逻辑关系用"树"的形式表达出来,使得条理清楚,结论也一目了然,故我们称这样的树为判决树.

显然,判决树并不是唯一的.例如我们也可将四个银元中的任两个放在天平的一边,而将另两个放在天平的另一边来进行比较,然后再进一步比较判断,最后找出假银币.如图 2.1.4 中的判决树,其中 $a,b:c,d$ 即表示把 a,b 放在天平的一边,而 c,d 放在天平的另一边来进行比较.图中的虚线仍表示不可能发生的情形.

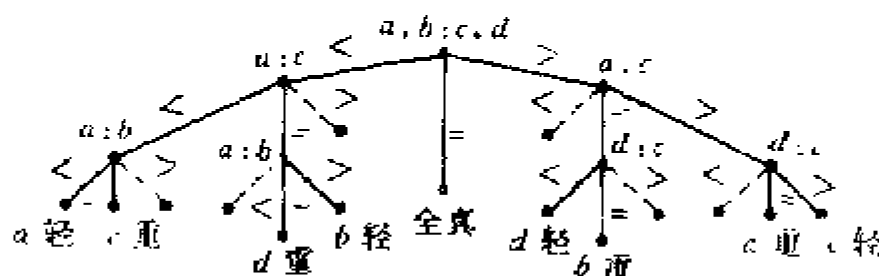


图 2.1.4

例 2.1.4 代数表达式 $v_1v_2/v_3+v_4(v_5-v_6/v_7)$ 可以形象地表示为如图 2.1.5 的形式:

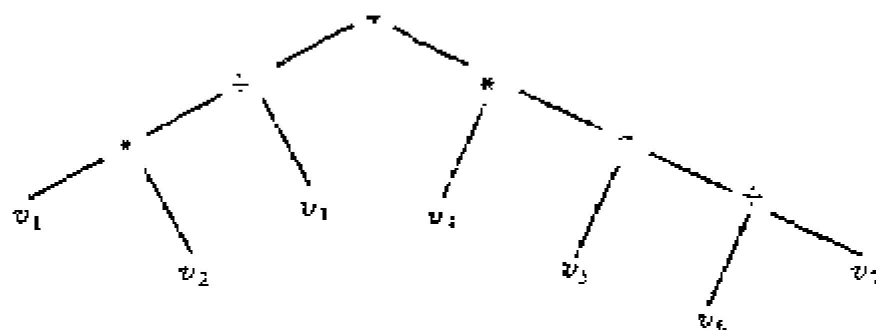


图 2.1.5

称上图为代数式 $v_1v_2/v_3+v_4(v_5-v_6/v_7)$ 的表达式树.

例 2.1.5 设有 n 根火柴,甲、乙两人依次从中取走 1 根或 2

根，但不能不取，也不能多取．规定谁取定最后一根火柴谁就是胜利者．下面用树的方法来寻求取胜的策略．

为了简明地说明方法，不妨设 $n=7$ 来进行分析．在图 2.1.6 中，我们用符号⊠表示轮到甲取时，还剩有 x 根火柴；而用符号ⓨ表示轮到乙取时，还剩有 y 根火柴．

显然，只要出现①或②的状态，则必然甲取胜，不必再继续进行；同样，只要出现①或②的状态，则必然是乙取胜，也不必继续讨论．见图 2.1.6．

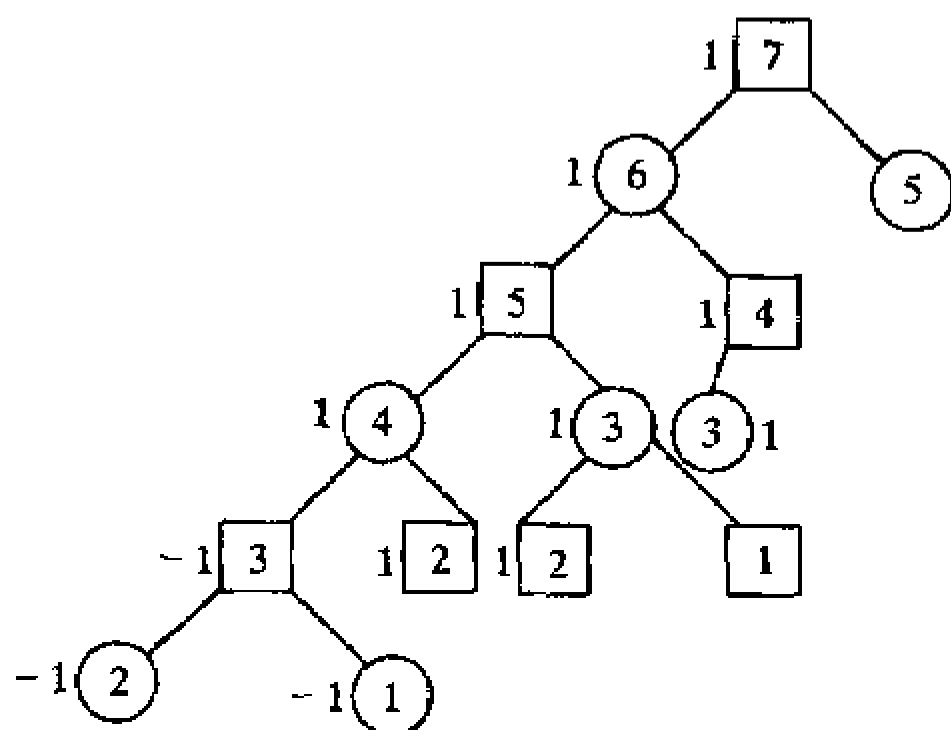


图 2.1.6

若甲取胜时，设其得分为 1；若乙取胜，可设甲得分为 -1．显然，轮到甲作出判决时，他一定要选择能取值为 1 的策略；而轮到乙作出判决时，他必然要选择使甲取值为 -1 的对策．这个道理是显而易见的．比如，当甲遇到如图 2.1.7 的状态时，他应取 1 根火柴使之进入状态③，从而使乙进入必然失败的状态．这样，虽然在状态②下甲得 -1 分，但在④的状态下轮到甲取，而显然在③的状态下甲得 1 分，故分别在③及④的上角注明甲所得的分值 1，同理，当乙遇到图

2.1.8 的状态时,他也应取 1 根火柴,使之进入状态[3],从而使甲进入必然失败的状态.

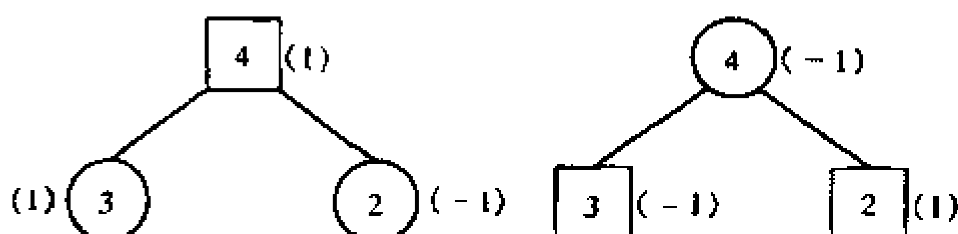


图 2.1.7　　　　图 2.1.8

这样,在图 2.1.6 中,开始时若有 7 根火柴,先取者胜局已定(除非对局者失误),这是因为状态⑥时取使为 1,故甲先取时,只需由[7]取 1 根火柴,使之进入⑥即可.

图 2.1.6 中各点的取值(上角所标的数字)是自下而上回溯的. 比如状态⑤的取值为 -1,这是因为在状态⑤时轮到乙取,虽然状态[4]的取值为 1,但乙可取 2 根火柴,使之进入状态[3],从而使甲必然失败,故状态⑤的取值应为 -1.

又因在状态[7]时轮到甲取(我们是在共有 $n=7$ 根火柴,且甲先取时来讨论问题的),故甲必然选取 1 根火柴,使之进入状态⑥,从而对状态⑤的继续搜索可以略去,这样也可达到"剪枝"的目的,使搜索的过程更加条理清晰.

对于例 2.1.5 所讨论的游戏,我们可以给出如下更一般的结论:

设有 n 根火柴. 甲、乙两人依次从中取走 1 根或 2 根(不能不取,也不能多取),且规定谁取走最后一根火柴,谁就是胜利者,则对任意正整数 n, $n\equiv 0(3)$时,后取者获胜,否则先取者获胜.

证明　因 $n=1$ 或 $n=2$ 时,显然必先取者获胜,故下面只需考虑 $n\geqslant 3$ 的情形.

记　$n=3k+r$. 其中 k 为正整数, $r=0,1,2$.

下面对 k 作归纳法.

$k=1$ 时,由于 $n=3$,后取者获胜; $n=4$ 或 $n=5$ 先取者获胜,故此时结论或立;

归纳假设 $k=s$ 时结论成立，即 $n=3s+r$ 时，结论成立.

则 $k=s+1$ 时，共有 $n=3(s+1)+r$ 根火柴，此时：

(1) 若 $r=0$ 时，则不论先取者取 1 或 2 根火柴，后取者总可相应地取 2 或 1 根火柴，使先取者第二次取时恰有 $3(s+1)-3=3s$ 根火柴，从而由归纳法假设，后取者获胜；

(2) 若 $r\neq 0$ 时，则因 $r=1$ 或 $r=2$，此时先取者即可取 r 根火柴，使后取者在第一次取时即有 $3(s+1)$ 根火柴. 这样，由(1)的证明，即知原来先取者获胜.

归纳法完成.

§2.2 树的基本性质

树有许多性质. 有些性质是树的必要条件，同时也是树的充分条件，因而树有许多等价的定义. 下面的定理即给出了一些等价的定义.

定理 2.2.1 设图 $G=(V,E)$，且 $|V|=n$，$|E|=m$，则下面各命题是等价的：

(1) G 是连通图且不含回路(即 G 为树)；

(2) G 的每对顶点之间有且仅有一条道路；

(3) G 是连通的，且 $m=n-1$；

(4) G 中无回路，且 $m=n-1$；

(5) G 中无回路，但在 G 的任何两个不相邻的顶点之间增加一条新边，就得到唯一的一条回路；

(6) G 是连通的，但删去 G 的任一条边后，所得的图就不是连通的(我们称这样的边为"桥")，即 G 的每条边均为桥.

注 这里指的删去一条边，仅指删掉该边，而不删去与该边相关联的顶点.

证明 (1)⇒(2)

设 u,v 是 G 中任意两个顶点，则由 G 的连通性，知 u,v 之间必至少有一条道路. 若 u,v 之间有两条不同的道路 P_1 和 P_2，则必

存在 P_1 的一条边 $e=(u_1,v_1)$，而 $e\notin P_2$. 显然 $(P_1\cup P_2)-e$ 是连通的，故 $(P_1\cup P_2)-e$ 中必存在一条分别以 u_1,v_1 为起点和终点的道路 P. 但这样一来，$P+e$ 将构成图 G 的一个回路，这与(1)的假设矛盾.

(2)⇒(3)

因为 G 中任意两顶点之间均有道路相连，故任意两个顶点均是连通的，从而 G 是连通图. 下面用归纳法证明 $m=n-1$.

对顶点的个数 $|V|=n$ 作归纳.

$n=1$ 时，$m=0$，结论显然成立.

归纳假设 $n\leqslant k$ 时结论成立，下证 $n=k+1$ 时结论也成立.

设 $e=(u,v)$ 是图 G 的任一条边，由(2)的假设知，u,v 之间除了道路 uv 之外，无别的道路，因而 $G-e$ 得两个分支 G_1 和 G_2，且 G_1 与 G_2 均为连通图. 设 $G_1=(V_1,E_1)$，$G_2=(V_2,E_2)$，$|V_1|=n_1$，$|V_2|=n_2$，$|E_1|=m_1$，$|E_2|=m_2$，$n_1+n_2=n$，$m_1+m_2=m-1$.

显然有 $n_1\leqslant k$，$n_2\leqslant k$，故由归纳法假设，得 $m_1=n_1-1$，$m_2=n_2-1$，从而：

$$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1.$$

(3)⇒(4)

只要证明 G 中无回路即可.

若 G 中有回路，则从该回路中删去任意一条边后，所得的图仍为连通图. 如果所得的图中再有回路，可再从回路中删去一条边，如此下去，直到所得的图中无回路为止. 设共删去 $r(r\geqslant 1)$ 条边所得图为 G'. 由作法知 G' 无回路，但 G' 仍是连通的，故 G' 为一棵树. 而由前面所证(1)⇒(2)⇒(3)知，$G'=(V',E')$ 中，仍应满足：

$|E'|=|V'|-1$，但 $|V'|=|V|=n$，$|E'|=m-r$，于是得：$m-r=n-1$，即有 $m=n-1+r(r\geqslant 1)$，与已知条件矛盾.

(4)⇒(5)

先证在满足条件(4)时，G 是连通的. 如若不然，设 G 有 $k(k\geqslant 2)$个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$. 并设 G_i 有 n_i 个顶点，有 m_i 条边($i=1,2,\cdots,k$). 由于 G 中无回路，故每个连通分支 G_i 中均无回路，从而每个分支 G_i 都是树. 再由前面(1)⇒(2)⇒(3)所证，有 $m_i=n_i-1,i=1,2,\cdots,k$. 于是，

$$\begin{aligned}n&=n_1+n_2+\cdots+n_k=\\&(m_1+1)+(m_2+1)+\cdots+(m_k+1)=\\&m_1+m_2+\cdots+m_k+k=m+k(k\geqslant 2).\end{aligned}$$

这与已知 $m=n-1$ 矛盾. 故 G 是连通的，且 G 又无回路，从而 G 必为一棵树. 再由前面(1)⇒(2)所证，知 G 中任意两个不相邻的两个顶点 u、v 之间存在唯一的道路 P，将道路 P 再添加新边(u,v)则形成一条唯一的回路.

(5)⇒(6)

仍先证明图 G 是连通的.

如若不然，设 G_1 与 G_2 是 G 的两个连通分支，v_1 为 G_1 中的一个顶点，v_2 为 G_2 中的一个顶点. 显然在图 G 中添加边(v_1,v_2)后不能得到回路，这与已知条件矛盾. 故 G 必连通.

下证 G 的每条边均为桥.

若 G 中存在边 $e=(u,v)$，$G-e$ 仍连通，则 $G-e$ 中一定存在 u 到 v 的道路 P. 显然道路 P 与 e 构成 G 中的回路，与 G 中无回路的条件矛盾.

(6)⇒(1)

只需证明 G 中无回路即可.

若 G 中含有回路 C，则删除 C 上的任何一条边后，所得的图仍连通，这与(6)中的条件矛盾.

除了由定理 2.2.1 给出的树的充分必要条件外，树还有下面重要的必要条件.

定理 2.2.2 树中至少有两个顶点的度数为1，换言之，即树中至少有两片树叶.

证明 设树 $G=(V,E)$，$|V|=n$，$|E|=m$. 则由握手定理可知：

$\sum\limits_{v\in V}d(v)=2m$.

另一方面，由定理 2.2.1 知：$m=n-1$，于是

$\sum\limits_{v\in V}d(v)=2m=2(n-1)=2n-2$.

如果 G 中每个顶点的度数皆大于或等于 2(或者 G 中只有一个顶点的度数为 1，而其余顶点的度数均大于或等于 2)，则必有：

$\sum\limits_{v\in V}d(v)\geqslant 2n$. (或 $\sum\limits_{v\in V}d(v)\geqslant 2(n-1)+1=2n-1$).

这均与前面所得 $\sum\limits_{v\in V}d(v)=2n-2$ 矛盾.

此矛盾表明 G 中至少有两片树叶.

注 连通图中，任一顶点 v 的度数均大于或等于 1.

例 2.2.1 设树 T 中有 n 个顶点，其中4度、3 度、2 度的顶点各 1 个，其余的顶点均为树叶. 问 T 中有几个顶点？有几片树叶？

解 设树 T 中有 x 片树叶. 则由定理 2.2.1 及握手定理知：

$4+3+2+x=2(1+1+1+x-1)\Rightarrow x=5$.

从而 $n=1+1+1+x=8$.

故树 T 中有 8 个顶点，且有 5 片树叶.

§2.3 割边与割点

在定理 2.2.1 的(6)中，我们给出树的一个等价定义：G 是连通图，但删去 G 的任何一条边后，所得的图就不连通，即 G 的每条边均为“桥”. 下面我们进一步讨论这个问题.

定义 2.3.1 如果在图 G 中删去一条边后，图 G 的分支数增加，则称此边为 G 的割边(或桥).

定义 2.3.2 如果在图 G 中去掉一个顶点(同时也去掉与该顶点相关联的所有边)后，图 G 的分支数增加，则称该顶点为 G 的割点.

例 2.3.1 在下面图2.3.1中所示的图中，e_1,e_2,e_3，均为割边

(桥)，而 v_1, v_2, v_3, v_4 均为割点. 我们强调指出：边 e_3 也是割边，这是因为去掉 e_3 后，图 G 变为有一个孤立点 u 和一个连通分支的分离图.

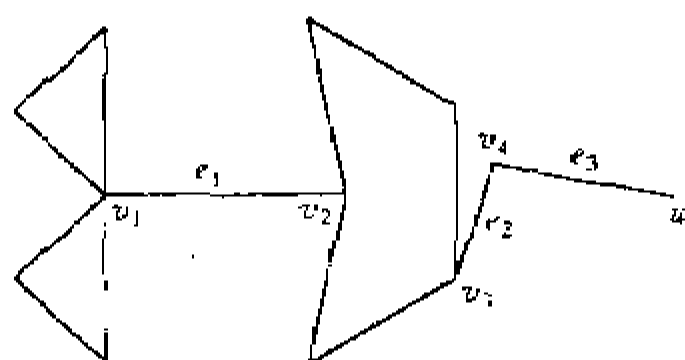


图 2.3.1

定理2.3.1 当且仅当图 G 的一条边 e 不包含在 G 的任何一个回路中时，e 才是割边.

证明 e 是图 G 的一条割边，则由于 $G-e$ 的分支数大于 G 的分支数，知 G 中必存在顶点 u, v，使得 u, v 在 G 中连通，但它们在 $G-e$ 中不连通.

从而，在 G 中存在某条 $u-v$ 道路（符号 $u-v$ 表示 u, v 中任一点均可为始点，也均可为终点的道路）P，且道路 P 必通过边 e. 再设 $e=(x, y)$，则在 $G-e$ 中，道路 P 必有一节，使 u 与 x 连通，且另有一节，使 y 与 v 连通，见图 2.3.2 中的图 G.

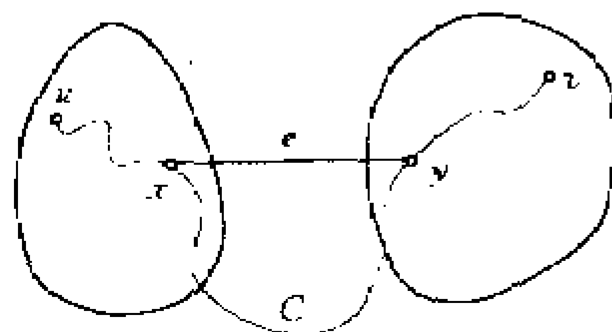


图 2.3.2

若 e 在 G 的某回路 C 中，x, y 将由 $C-e$ 相联结，这表明 u 和

v 在 $G-e$ 中成为连通的，这与充分性假设矛盾.

反之，假设边 $e=(x,y)$ 不是割边，则必有 $G-e$ 与 G 的分支数相同.

因为 G 中存在一条 $x-y$ 道路，即边 (x,y) 本身，所以 x,y 必在 G 的同一分支中，而这样一来，x,y 也必将在 $G-e$ 的同一分支中(假若不然，$G-e$ 的分支数将会大于 G 的分支数，显然不可能). 从而在 $G-e$ 中就必有一条 $x-y$ 道路 P，于是边 e 就包含在 G 的回路 $P+e$ 之中了.

定理 2.3.2 当且仅当连通图 G 的每一条边均为割边时，G 才是一棵树.

证明 由定理 2.2.1，立得.

定理 2.3.3 当且仅当图 G 中存在与顶点 u 不同的两个顶点 v_1 和 v_2，使得所有的 $v_1—v_2$ 道路都通过 u 时，u 才是割点.

证明 记 $G=(V,E)$，并设 u 是图 G 的一个割点，则 $G-u$ 是至少有两个分支的分离图.

设 $G-u$ 中一个分支的顶点集合为 V_1，而将 $G-u$ 中其余顶点的集合记为 V_2，于是：

$V=V_1\cup V_2\cup\{u\}$，且 $V_1\cap V_2=\varnothing$，$u\notin V_1$，$u\notin V_2$.

于是对任何两个满足条件：$v_1\in V_1$，$v_2\in V_2$ 的顶点 v_1，v_2 来说，它们必在 $G-u$ 的不同分支中. 从而对于 G 中每条 $v_1—v_2$ 道路 P 来说，它必含有顶点 u.

反之，若 u 在 G 的每条联结 v_1 和 v_2 的道路上，则在 $G-u$ 中必不可能存在一条联结 v_1 和 v_2 的道路，从而 $G-u$ 就是不连通的，这表明 u 是图 G 的一个割点.

注 $G-u$ 表示从图 G 中去掉顶点 u 以及所有和 u 相邻接的边所得到的图.

例 2.3.2 任一树 T 中顶点度数大于 1 的点均为割点.

证明 设 u 为树 T 中度数大于 1 的任一顶点，则必存在 T 中的两个异于 u 的顶点 v_1 和 v_2，使得 (v_1,u) 和 (u,v_2) 均为 T 的边，

且道路 $P=v_1uv_2$ 必为树 T 中唯一由 v_1 到 v_2 的道路，故由定理 2.3.3，知 u 为割点.

定义 2.3.3 设图 $G=(V,E)$，$\forall u,v\in V$，当存在连结 u 和 v 的道路时，所有这些连结 u,v 的道路中最短道路（边数最少）之长称为 u 与 v 之间的距离，记作：$d(u,v)$，如果不存在连结 u,v 的道路，则规定 u,v 之间的距离为无穷，记作：$d(u,v)=\infty$.

定理 2.3.4 一个连通图 G 至少有两个顶点不是割点.

证明 令 u 和 v 是图 G 中有最大距离（即连结 u 和 v 的道路边数最多）的两个点，因图 G 是连通的，故这种最大距离是一定存在的.

假若 u 是割点，则 G 中必另有一顶点 v_1，它与 v 在 $G-u$ 的不同分支中，从而由定理 2.3.3，u 必在每条连结 v 和 v_1 的道路上.

这样必有：$d(v,v_1)>d(u,v)$，见图 2.3.3.

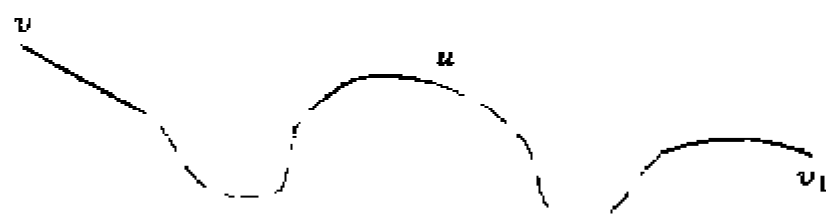


图 2.3.3

这与所设 u 和 v 是图 G 中具有最大距离的两个顶点的假设矛盾. 故 u 不是割点.

用同样的论证方法可知 v 也不是割点. 从而知图 G 中至少有两个顶点不是割点.

定理 2.3.5 设 $G=(V,E)$ 是一棵树，则对任意 G 的顶点 u，当且仅当 $d(u)>1$ 时，u 是割点.

证明 必要性 由例 2.3.2 已证.

下证充分性.

设 u 是树 G 的一个割点，则必有 $d(u)\geq 1$（因树是连通的），但若 $d(u)=1$ 时，则 $G-u$ 的边数仍然比顶点数少 1，且 $G-u$ 无回

路，即 $G-u$ 仍是一棵树，这表明 $G-u$ 是连通的，故 u 不是 G 的割点.

这样，我们就证明了当 u 是树 G 的割点时，必有 $d(u)>1$.

定义 2.3.4 若非平凡的连通图 G 没有割点时，则称 G 为不可分图.

例 2.3.3 图2.3.4即为一个不可分图.

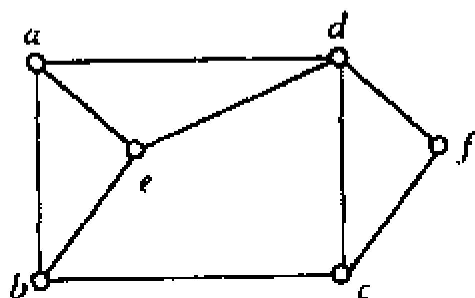


图 2.3.4

定理 2.3.6 不可分图的任一边至少在一个回路中.

证明 设 $e=(x,y)$是不可分图 G 的任一条边，则因 x,y 都不是割点，所以图 $G-e$ 仍是连通图，故在 $G-e$ 中必有一条 $x-y$ 道路 P，这表明：$P+e$ 构成 G 中的一个回路.

例 2.3.4 设图 G 中 $e=(x,y)$ 为割边，则顶点 x(或 y)为割点的充要条件是 $d(x)>1$(或 $d(y)>1$).

证明 必要性：因 x 是割点，所以 $G-x$ 的分支数大于 G 的分支数，必 $d(x)>1$. 否则，$d(x)=1$ 时，从 x 出的边只有(x,y)，从而 $G-x$ 与 G 有相同的分支数，矛盾.

充分性：因为 $d(x)>1$，所以与 x 邻接的边除(x,y)至少还有一条，设为(x,u)，而 $G-e$ 中，y 与 x 在不同的分支中，必 y 与 u 也在不同的分支中. 这表明 $G-e$ 至少有 y 与 u 在新的不同分支中，故 x 为割点. 见图 2.3.5.



图 2.3.5

§2.4 生成树及其求法

定义 2.4.1 设 T 是图 G 的一棵生成树,则 T 的所有连枝(弦)的集合(包括与这些弦相关联的顶点),称为树 T 在 G 中的余树.

例 2.4.1 如图2.4.1所示的图 G 中,(a)即为图 G 的一棵生成树 T,(b)为树 T 在图G 中的余树.

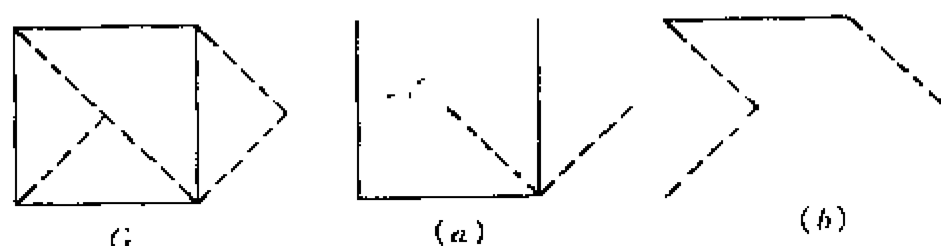


图 2.4.1

注 树 T 在图 G 中的余树不一定连通,也不一定不含回路.如图 2.4.2 中,(a)也是图 2.4.1 中图 G 的一棵生成树,而(b)是(a)中生成树的余树.显然它即不连通且又包含回路.因此,一般地来说"余树"不一定是树,更不一定是生成树.

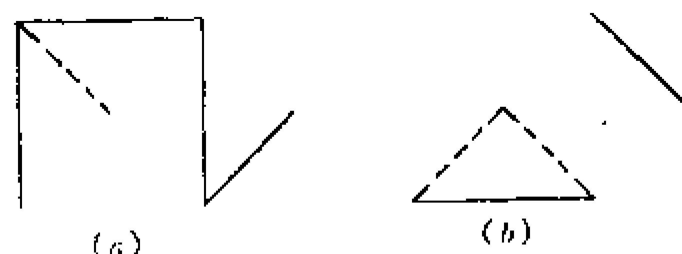


图 2.4.2

定理 2.4.1 图 G 有生成树的充分且必要条件是:G 为连通图.

证明 必要性:设 G 有生成树,假若 G 不连通,则 G 的任一个生成子图也都不能是连通的,从而 G 不会有生成树,这与必要性假设矛盾.

充分性:设 G 是连通图,且 T 是 G 的边数最小的连通生成子图.于是对 T 的任一边 e 来说,$T-e$ 是分离的,这表明 T 的每一条边均为割边,因而 T 必为一棵树.但 T 又是图 G 的生成子图,故 T 就是 G 的一棵生成树.

推论 $G=(V,E)$ 为 n 阶连通图,$|E|=m$,则 $m\geqslant n-1$.

证明 由定理 2.4.1 知 G 有生成树 T,记 $T=(V,E_1)$,则 $|E_1|=|V|-1=n-1$.于是:$m=|E|\geqslant|E_1|=n-1$.

定理 2.4.2 设图 $G=(V,E)$,$|V|=n$,$|E|=m$,则 T 是 G 的一棵生成树的充要条件是:T 为 G 有 $n-1$ 条边的连通生成子图.

证明 必要性:设 T 是 G 的一棵生成树,则 T 是图 G 的一个生成子图,故 T 必有 n 个顶点;又因 T 是一棵树,从而 T 是连通的且有 $n-1$ 条边,即 T 为 G 的有 $n-1$ 条边的连通生成子图.

充分性:设 T 是 G 的有 $n-1$ 条边的连通生成子图,则 T 必有 n 个顶点.又因 T 是连通的,故由定理 2.2.1 知,T 是一棵树.这表明 T 是图 G 的一棵生成树.

定理 2.4.3 设 T 是连通图 G 的一棵生成树,且边 e 是 T 的一条连枝(弦),则 $T+e$ 含有一条唯一的回路.

证明 设 $e=(u,v)$,则因 T 是 G 的一棵生成树,知 u 与 v 在 T 中是连通的.记 T 中 u—v 道路为 P,则 $P+e$ 即为 $T+e$ 中一条唯一的回路.

下面介绍求一个连通图 G 的生成树的两种常用方法:避圈法和破圈法.

1. 避圈法

所谓"避圈法"的具体方法是:先在图 G 中任取一条边 e_1;再取

一条和 e_1 不构成圈的边 e_2;然后再取一条边 e_3;使 e_3 和 e_1,e_2 均不能构成圈.如此继续下去,直到最后得出 G 的一个不含圈的连通生成子图 T 为止,则 T 就是图G 的一棵生成树.

例 2.4.2 在如图2.4.3所示的图 G 中,取 $e_1=(v_1,v_2)$,再依次取 $e_2=(v_2,v_3)$,$e_3=(v_3,v_4)$,$e_4=(v_4,v_5)$,则由边集$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$组成的子图 T_1 即为图 G 的一棵生成树.

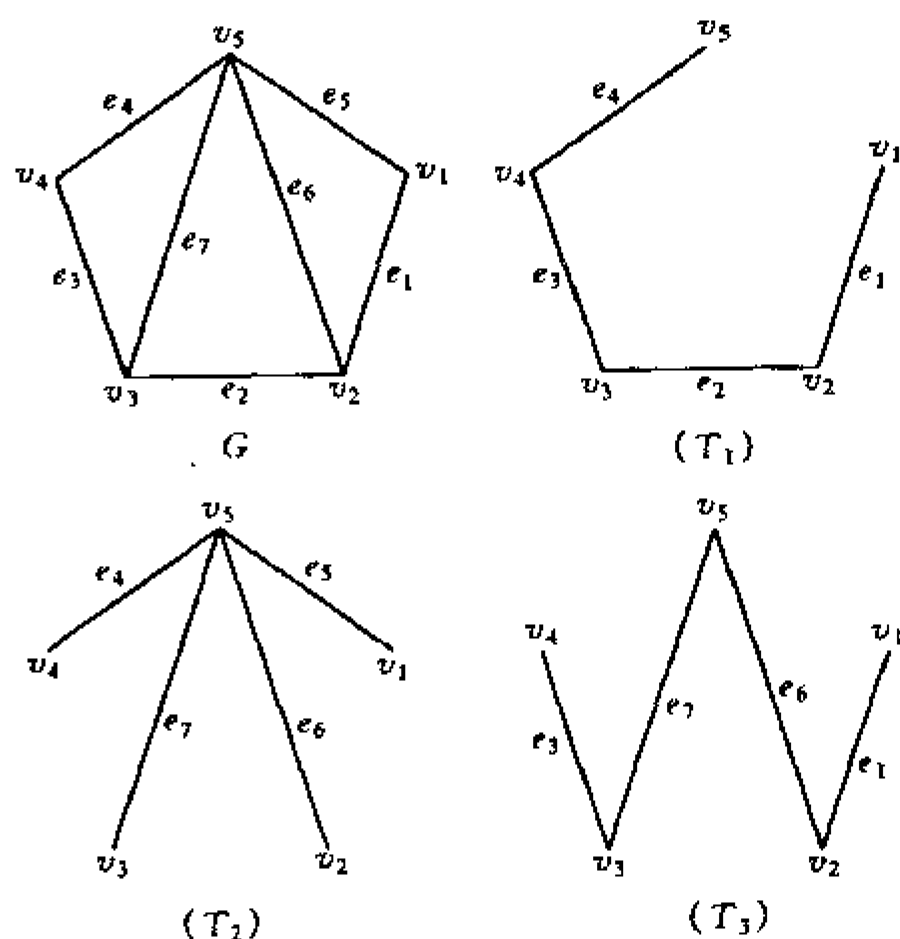


图 2.4.3

显然,还可从其他边出发而得到另外的生成树,如由边集$\{e_4,e_5,e_6,e_7\}$组成的生成树 T_2,由边集$\{e_1,e_3,e_6,e_7\}$组成的生成树 T_3.

2.破圈法

所谓"破圈法"即将每一个圈(回路)破坏的意思.具体方法是:先

在图 G 中任取一个圈(若 G 中无圈,则 G 无回路,又因 G 是连通的,这表明 G 的生成树为自身),去掉其中的一条边;然后再取一个圈,同时再去掉这个圈上的一条边.如此继续下去,最后得到的无圈生成子图就是图 G 的一棵生成树.

例 2.4.3 去掉图2.4.3的图 G 中圈 $v_1v_2v_5v_1$ 中的边 e_5,再去掉 $v_2v_3v_5v_2$ 中的边 e_6,最后再去掉圈 $v_3v_4v_5v_3$ 中的边 e_7,即得到与例 2.4.2 中由避圈法所得的生成树 T_1.

同样,若先去掉该图 G 中圈 $v_1v_2v_5v_1$ 中的边 e_1,再去掉圈 $v_2v_3v_5v_2$ 中的边 e_2,最后再去掉圈 $v_3v_4v_5v_3$ 中的边 e_3,就得到与图 2.4.4 中相同的生成树 T_2.

显然,一个连通图的生成树不是唯一的,我们可利用"避圈法"或"破圈法"来求出一个连通图的全部生成树.

例 2.4.4 图2.4.3中的图 G 的全部(共 21 棵)生成树如下图(图 2.4.4)所示:

由以上讨论可知,连通 G 的生成树在以下两种意义下都不一定是唯一的.

(1) 在非同构意义下,即两棵生成树存在不同的边就认为它们是不同的;

(2) 在同构意义下,即连通图 G 可以存在非同构的生成树.

例 2.4.5 例2.4.4给出的图 G 的 21 棵生成树,在同构的意义下,只有下面三种是不同的,见图 2.4.5.

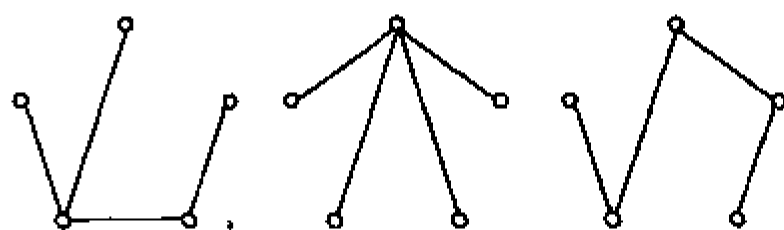


图 2.4.5

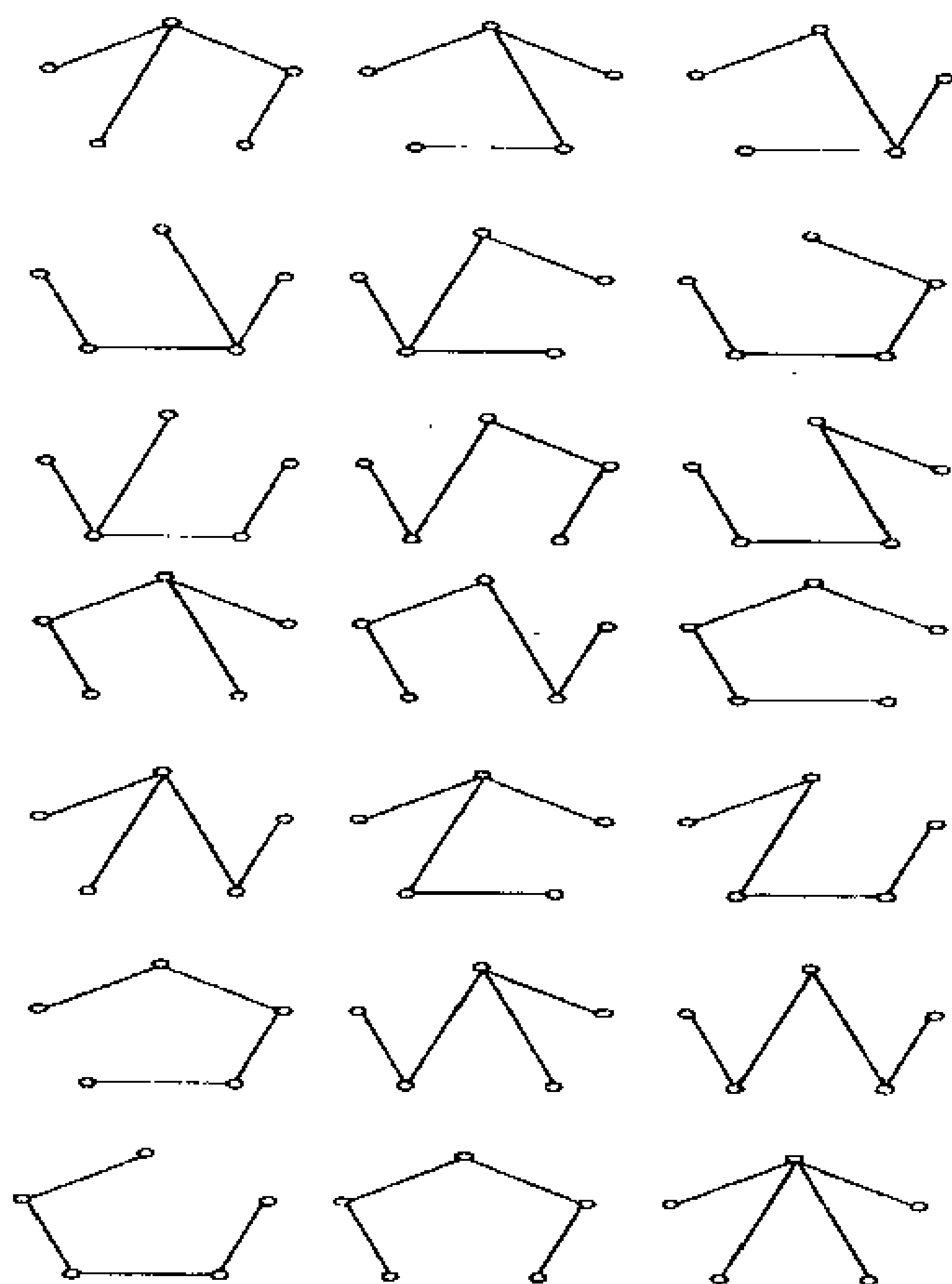


图 2.4.4

定理 2.4.4 设连通图 $G=(V,E)$,且 $|V|=n$, $|E|=m$, T 是 G 的一棵生成树, T' 是树 T 在 G 中的余树,则 T' 中有 $m-n+1$ 条边,即 T 有 $m-n+1$ 条弦.

证明 因为生成树有 $n-1$ 条边(树枝),所以 T 有 $m-(n-1)$

$= m - n + 1$ 条弦.

例 2.4.6 给出图2.4.6(a)中所示图的两棵非同构的生成树,并指出它们的树枝和弦.

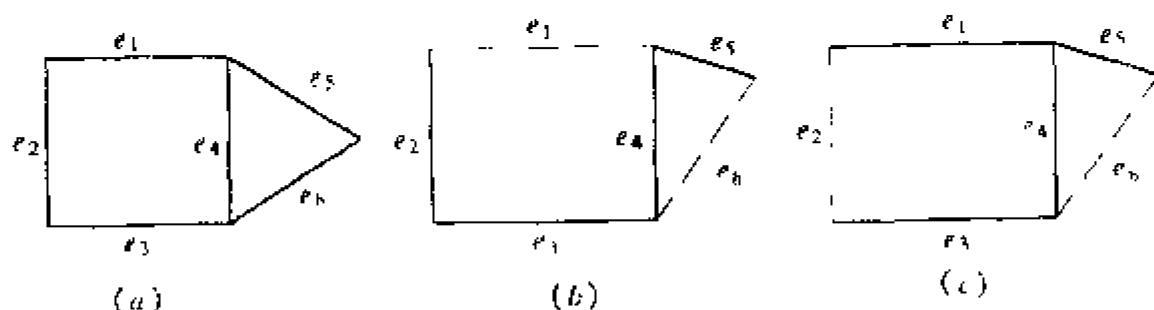


图 2.4.6

解 图 2.4.6 中(b),(c)所示的图(实边)都是图 2.4.6(a)中图的生成树,设它们分别为 T_1 和 T_2,它们显然是非同构的. 且 e_2, e_3, e_4, e_5 为 T_1 的树枝, e_1, e_6 为 T_1 的弦;而 e_1, e_3, e_4, e_5 为 T_2 的树枝, e_2, e_6 为 T_2 的弦.

在图 2.4.6 的树 T_1 中加弦 e_1 或 e_6 则分别产生回路 $e_1e_2e_3e_4$ 或 $e_4e_5e_6$. 这样的回路的共同特点是:它们中均各只含 1 条弦,而其余的边都是树枝,我们称这样的回路为生成树的基本回路,下面给出其严格定义如下:

定义 2.4.2 设 G 是有 m 条边的 n 阶连通图, T 是 G 的一棵生成树, T 的 $m - n + 1$ 条弦分别为: $e_1, e_2, \cdots\cdots, e_s$ ($s = m - n + 1$). G 中仅含 T 的一条弦 e_k 的回路 C_k 称作对应弦 e_k 的基本回路, ($k = 1, 2, \cdots, s$). 而集合 $\{C_1, C_2, \cdots, C_s\}$ 称作对应生成树 T 的基本回路系统.

例 2.4.6 中,生成树 T_1 对应的基本回路有两个:对应弦 e_1 的为 $e_1e_2e_3e_4$,对应弦 e_6 的为 $e_4e_5e_6$. 基本回路系统为 $\{e_1e_2e_3e_4, e_4e_5e_6\}$. 而生成树 T_2 对应的基本回路也有两个:对应弦 e_2 的为 $e_2e_3e_4e_1$,对应弦 e_6 的为 $e_6e_5e_4$. 基本回路系统为 $\{e_2e_3e_4e_1, e_6e_5e_4\}$.

上面两个基本回路系统中，一个共同的特点是它们各自所含元素个数是相同的，都是2.这并不是偶然现象.事实上，任何一个连通图 G 对应不同生成树的基本回路可能不同，但基本回路的个数是相同的，都等于 $m-n+1$(其中 m 为 G 的边数，n 为 G 的顶点数).

我们看图2.4.6(b)中图的边集 $S_1=\{e_5,e_6\}$，$S_2=\{e_1,e_4,e_6\}$，$S_3=\{e_1,e_2\}$，$S_4=\{e_1,e_3\}$，它们具有如下的共同特点：在(a)中去掉 S_i 的所有边后，(a)变成了具有两个分支的分离图，但是只去掉 S_i 中的部分边，图(a)将仍是连通的，我们称这样的边集为图(a)的一个割集.显然，当某割集中只有一条边时，则该边即为图(a)的一条割边.

另外，我们上面给出的4个割集又具有如下特点：每个割集中都有且只有1条树枝，面其余边均为弦.称这样的割集为生成树 T_1 对应的基本割集.下面给出基本割集的一般定义.

定义2.4.3 设 T 是 n 阶连通图 $G=(V,E)$ 的一棵生成树，$e'_1,e'_2,\cdots,e'_{n-1}$ 为 T 的树枝，设 S_r 是只含树枝 e'_r，其余边均为弦的割集.称 S_r 为对应树枝 e'_r 的基本割集，$\{S_1,S_2,\cdots,S_{n-1}\}$ 为对应生成树 T 的基本割集系统.

同基本回路系统的情况类似，G 的不同生成树的基本割集可以不相同，但基本割集的个数是相同的，其个数恰为 $n-1$.图2.4.6(c)对应生成树 T_2 也有四个基本割集：$\{e_5,e_6\}$，$\{e_2,e_4,e_6\}$，$\{e_2,e_3\}$，$\{e_1,e_2\}$，将它们组成集合，就是基本割集系统.

给定连通图 G 的生成树 T 之后，T 对应的基本回路系统和基本割集系统不仅是存在的，面且是唯一的.只要记住基本回路的特点(只含一条弦，其余边均为树枝)和基本割集的特点(只含一条树枝，其余边均为弦)，就能较为容易地求出基本回路系统和基本割集系统.另外，要注意基本回路为由若干条边构成的一个圈，而基本割集为由若干条边(可能邻接，也可能不邻接)构成的边的集合，特别要注意它们写法上的不同.

例2.4.7 图2.4.7所示的图 G 中，实边所示的图为 G 的一棵

生成树 T.求对应 T 的基本回路系统和基本割集系统.

解 图的顶点数 $n=6$,边数 $m=9$,基本回路个数为:$m-n+1=9-6+1=4$.基本割集个数为:$n-1=6-1=5$.

T 的 4 条弦为:e,b,c,i.它们对应的基本回路分别为:$C_e=edfg$,$C_b=bda$,$C_c=cadfgh$,$C_i=igh$.基本回路系统为:$\{C_e,C_b,C_c,C_i\}$.

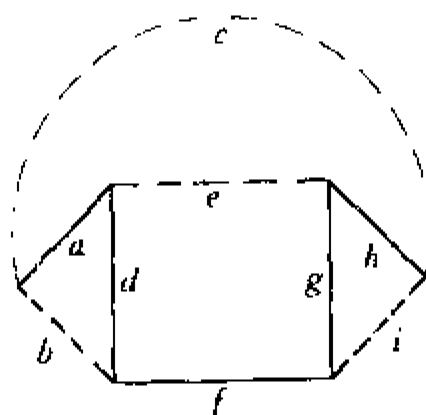


图 2.4.7

T 的 5 条树枝为:a,d,f,g,h.它们对应的基本割集分别为:$S_a=\{a,b,c\}$,$S_d=\{d,e,b,c\}$,$S_f=\{f,e,c\}$,$S_g=\{g,e,i,c\}$,$S_h=\{h,i,c\}$.基本割集系统为:$\{S_a,S_d,S_f,S_g,S_h\}$.

求树枝 e'对应的基本割集的方法如下:将 e'从 T 中删除,于是 $T-e'$有两个连通分支,分别记为 T_1 与 T_2.设 V_1 和 V_2 分别为 T_1 和 T_2 的顶点集,则 e'对应的基本割集为:

$S_{e'}=\{e\in E\mid e$ 的一个端点在 V_1 中,另一个端点在 V_2 中$\}$.

§2.5 根树及其应用

一个有向图 G,如果略去各边的方向后所得无向图为(无向)树,则称 G 为有向树.在有向树中,最重要的是根树,它们在计算机专业的数据结构、数据库等专业课程中占据极其重要的位置.本节主要讨论根树及它的简单应用.

定义 2.5.1 一棵非平凡的有向树,如果有一个顶点的入度为 0,其余顶点的入度均为 1,则称此有向树为根树.在根树中,入度为 0 的顶点称为树根;入度为 1 且出度为 0 的顶点称为树叶;入度为 1 且出度大于 0 的顶点称为内点;内点和树根统称为分支点.

例 2.5.1 图2.5.1中,(a)为一棵根树.

(a)为有向树,v_0 为树根;v_1,v_3,v_5,v_6,v_7 均为树叶;v_2,v_4 为

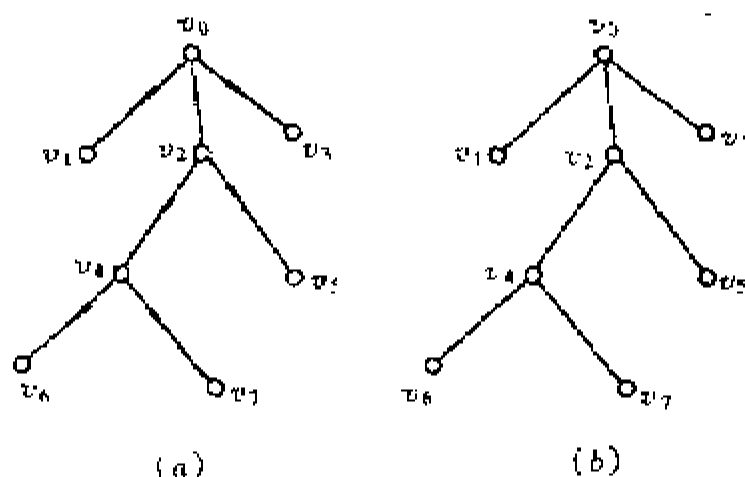


图 2.5.1

内点；v_0, v_2, v_4 为分支点. 在根树中，由于有向边的方向都是一致的，故当明确树根后，有向边的方向均可省去，即用图 2.5.1 中的(b)来代替(a)，其意义是明确的. 下面再提到根树时，其有向边的方向均省掉，并将树根放在其他各顶点的上方，如图 2.5.1 中的(b)所示.

在根树中，从树根到任一顶点 v 的道路长度称为 v 的层数，记作 $l(v)$；并称层数相同的顶点在同一层上；层数最大顶点的层数称为树高，并记 $h(T)$为根树 T 的高度.

例 2.5.1 中的根树 T 中，树根 v_0 处在第 0 层上，$l(v_0)=0$；v_1，v_2，v_3 处在第 1 层上，$l(v_i)=1(i=1,2,3)$；v_4，v_5 处在第 2 层上，$l(v_j)=2(j=4,5)$；v_6，v_7 处在第 3 层上，$l(v_k)=3(k=6,7)$，且 $h(T)=3$.

注 有的书中规定树根的层数为 1，而它的下一层顶点的层数为 2，等等，希望读者在阅读其他书籍时要注意区分.

在根树中，若从一顶点 u 出发，有一条有向边使之与顶点 v 相连，则称 u 邻接到 v. 又若 u 邻接到 u_1，u_1 邻接到 u_2，$\cdots$，u_{n-1}邻接到 u_n，u_n 邻接到 v，则称顶点 u 可达顶点 v. 例如，图 2.5.1 中的根树，v_0 邻接到 v_1，v_2 邻接到 v_4 等. 而 v_0 可达 v_2，v_0 可达 v_4，v_2 可达 v_7 等等.

下面给出“家族”树的概念.

设 T 是一棵根树.若顶点 a 邻接到顶点 b,则称顶点 b 为 a 的儿子,同时称 a 为 b 的父亲.又若顶点 b、c 的父亲相同,则称 b、c 为兄弟.又若顶点 $a \neq d$,且 a 可达 d,则称 a 为 d 的祖先,而 d 为 a 的后代.

在例 2.5.1 中的根树 T 中,顶点 v_1, v_2, v_3 均是兄弟,它们的父亲是 v_0.另外,v_4, v_5 是兄弟,它们的父亲是 v_2.同样,v_6, v_7 也是兄弟,它们的父亲是 v_4.这里,除 v_0 外,所有的顶点都是 v_0 的后代,而 v_0 是它们的祖先.

在根树 T 中,设 a 是一个非根的顶点,则称由 a 及 a 的后代形成的子图 T' 为根树 T 的以 a 为根的根子树.

例如,在例 2.5.1 的根树 T 中,取顶点 v_2,则 v_2 为非根顶点,v_2 的后代为:v_4, v_5, v_6, v_7.可得以 v_2 为根的根子树.

在应用中,往往将根树每一层上的顶点都规定次序,这就是下面定义的有序树.

定义 2.5.2 如果将根树每一层上的顶点都规定次序,这样的根树称为有序树.

有序树的次序可全标在顶点处,也可以全标在边上,且标出的次序不一定是连续的数.

根据根树各分支点有儿子的多少,以及顶点是否排序,可将根树分成若干类:

定义 2.5.3 设 T 为一棵根树.若 T 的每个分支点至多有 r 个儿子,则称 T 为 r 元树;若 T 的每个分支点都恰有 r 个儿子,则称 T 为 r 元正则树;若 r 元树 T 是有序的,则称 T 为 r 元有序树;若 r 元正则树是有序的,则称 T 是 r 元有序正则树;若 T 是 r 元正则树,且所有树叶的层数均为树高 $h(T)$,则称 T 为 r 元完全正则树;若 T 是 r 元完全正则树,且 T 是有序的,则称 T 为 r 元有序完全正则树.

在所有的 r 元树中,二元树是最重要的,在数据结构中称二元数为二叉树.

下面讨论二元树的应用.

在实践中,有时不仅需要表示事物之间是否有某种关系,而且需

要用数量来进一步表示这种关系.例如,一张公路交通图,不仅要表示出两个城市之间是否有公路,而且还要标出公路的长度.为此,可以用顶点来表示城市,而用边来表示两个城市之间有一条公路,并把这条公路的长度标在这条边的旁边,这就是赋权图.

定义 2.5.4 对图 G 的每条边 e 附加上一个实数 $w(e)$,称 $w(e)$ 为边 e 上的权. G 连同附加在各边上的权称为赋权图,并记作 $G=(V,E,W)$.

又设 $G_1 \subseteq G$,称 $\sum_{e\in E(G_1)} w(e)$ 为子图 G_1 的权,记作:$W(G_1)$.

其中 $E(G_1)$ 表示子图 G_1 的边集合.

一、最优树及其应用

定义 2.5.5 设二元树 T 有 t 片树叶 $v_1, v_2, \cdots, v_t$,权分别为 $w_i = w(v_i), i=1,2,\cdots,t$. 称 $W(T) = \sum_{i=1}^{t} w_i l(v_i)$ 为树 T 的权,其中 $l(v_i)$ 是 v_i 的层数.在所有 t 片树叶,带权 $w_1, w_2, \cdots, w_t$ 的二元树中,权最小的二元树称为最优二元树.

例 2.5.2 在图2.5.2中所示的 3 棵树:T_1, T_2, T_3 都是带权为 1,3,4,5,6 的二元树,它们的权分别为:

$W(T_1) = (1+4+5)\times 2 + (3+6)\times 3 = 47$;

$W(T_2) = 3\times 1 + 4\times 2 + 5\times 3 + (1+6)\times 4 = 54$;

$W(T_3) = (3+5+6)\times 2 + (1+4)\times 3 = 43$.

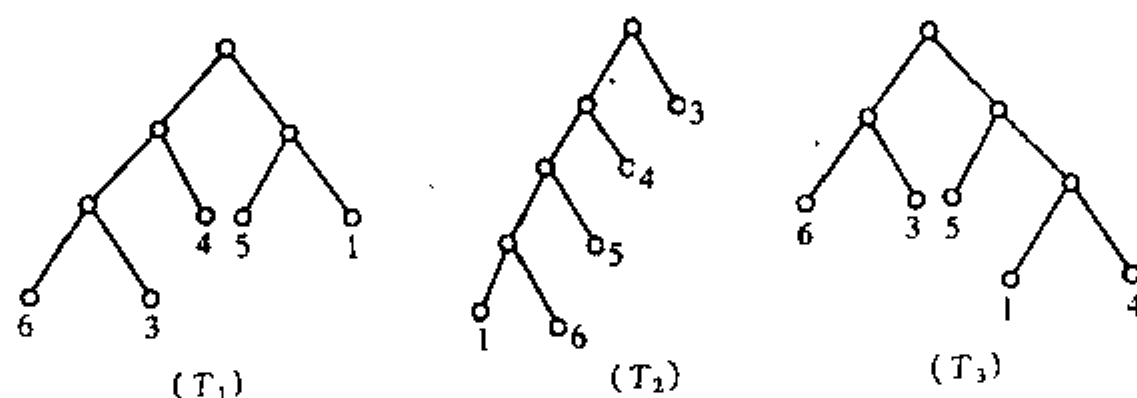


图 2.5.2

但上面的 3 棵树都不是带权为 1,3,4,5,6 的最优树.如何求最优树呢？我们给出如下方法：

给定实数 $w_1,w_2,\cdots,w_t$，且 $w_1\leqslant w_2\leqslant\cdots\leqslant w_t$，则可按如下步骤来求最优树

(1)连接权为 w_1,w_2 的两片树叶和一分支点,其权为 w_1+w_2;

(2)在 $w_1+w_2,w_3,\cdots,w_t$ 中选出两个最小的权,连接它们对应的顶点(不一定是树叶),得新分支点及所带的权;

(3)重复(2)的过程,直到形成 $t-1$ 个分点,t 片树叶为止.

例 2.5.3 求带权为1,3,4,5,6 的最优二元树,并计算权 $W(T)$.

解 为了熟悉算法,下面将计算最优树的过程在图 2.5.3 中分步骤给出.

图 2.5.3 的(c)即为带权 1,3,4,5,6 的最优二元树,它的权为：$W(T)=42$.

最优树的用途之一是求最佳前缀码.

在计算机通讯事业中,常用二进制编码表示字符.例如,可用 00,01,10,11 分别表示 A,B,C,D.称这种表示法为等长的表示法.在传输过程中,若 A,B,C,D 出现的频率相等,用等长的表示法是很好的表示法.但当它们出现的频率不相同时,比如说,A 占 50%,B 占 25%,C 占 20%,D 只占 5%,能否找到非等长的表示法,即能节省二进制的数位,又能准确无误地传送信息呢？这就是下面要寻找的前缀码.

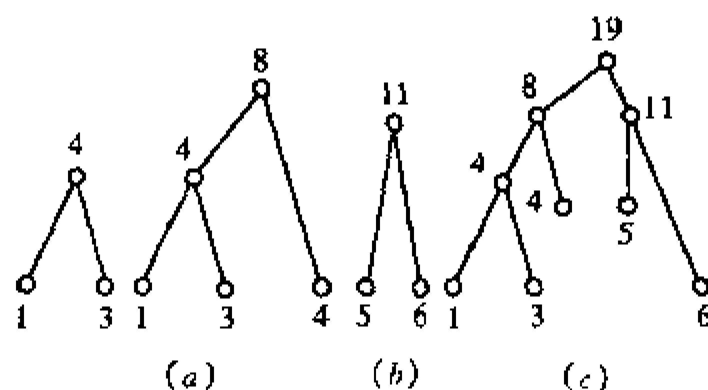


图 2.5.3

定义 2.5.6 设 $a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$ 是长度为 n 的符号串，称其子串 $a_1,a_1a_2,\cdots,a_1a_2\cdots a_{n-1}$ 分别为该符号串的长度为 $1,2,\cdots,n-1$ 的前缀.

设 $A=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m\}$ 为一个符号串集合. 若对于 A 中任两个元素 β_i,β_j，且 $\beta_i\neq\beta_j$，必有 β_i,β_j 互不为前缀，则称 A 为前缀码. 若符号串 $\beta_i(i=1,2,\cdots,m)$ 中，只出现 0,1 两个符号，则称 A 为二元前缀码.

例如，{1,01,001,000}，{00,10,11,011,0100,0101} 都是前缀码. 而{1,01,111,1100}不是前缀码，因为其中 1 是 111 和1100的前缀.

下面讨论如何利用二元树来产生二元前缀码.

给定一棵二元树 T，设它有 t 片树叶. 设 v 为 T 的一个分支点，则 v 至少有一个儿子，至多有两个儿子. 若 v 有两个儿子，在由 v 引出的两条边上，左边的标上 0，右边的标上 1. 若 v 只有一个儿子，则在由 v 引出的边上可标上 0，也可标上 1. 设 v_i 是 T 的任意一片树叶，从树根到 v_i 的道路上各边的标号组成的 0,1 符号串放在 v_i 处，t 片树叶处的 t 个符号串组成的集合为一个二元前缀码.

由上面的做法可知，v_i 处的符号串的前缀均在 v_i 所在的道路上除 v_i 外的顶点处达到，因而所得的符号串集合为二元前缀码. 另外，若 T 存在带一个儿子的分支点时，则由 T 产生的前缀码可能不唯一，但若 T 为正则二元树时，由 T 产生的二元前缀码是唯一的.

综上所述，即得下面的定理.

定理 2.5.1 由一棵给定的二元正则树，可产生唯一的一个二元前缀码.

例 2.5.4 图2.5.4所示的二元树产生的前缀码为：{000,001,010,0110,0111,10,11}.

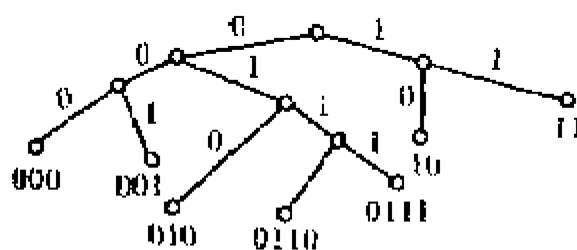


图 2.5.4

当知道了要传输的符号的频

率时，可以用各符号出现的频率（或 100 乘各频率）当权，由最佳二元树 T 产生的前缀码称为最佳前缀码，用这样的前缀码传输对应的符号可以使传输的二进位数最省.

例 2.5.5 在通讯中，八进制数字出现的频率如下：

0： 30%； 1： 20%；
2： 15%； 3： 10%；
4： 10%； 5： 5%；
6： 5%； 7： 5%.

求传输它们的最佳前缀码.

解 用 100 去乘各频率，并由小到大排序，得：$w_1=5, w_2=5, w_3=5, w_4=10, w_5=10, w_6=15, w_7=20, w_8=30$ 为 8 个权（记住它们数字的对应关系）. 求得最优二元树，如图 2.5.5 所示.

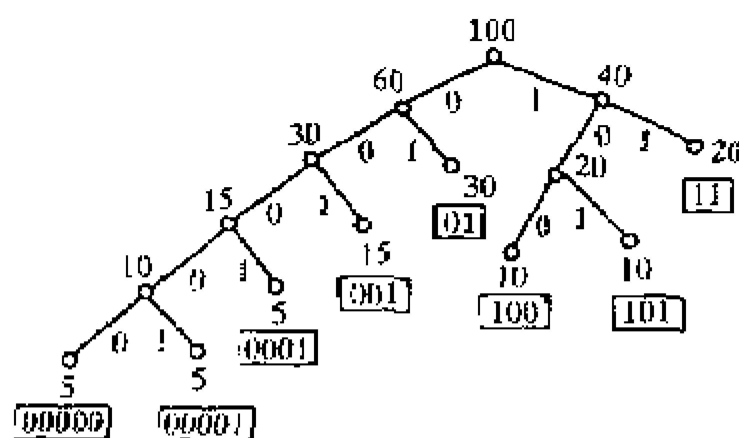


图 2.5.5

图中方框中的 8 个码子组成的集合是最佳前缀码. 8 个码子传输数字情况如下：

01	传 0,	101	传 4,
11	传 1,	0001	传 5,
001	传 2,	00001	传 6,
100	传 3,	00000	传 7.

除了等长的码子可以互换（如 0 与 1 的码子，2,3,4 的码子，6,7 的码子）外，其余的码子不可互换. 但要注意的是，一旦定下来谁传谁

之后，即使等长的码子也不能互换了，否则就传乱了.

用完全等长的码子传输八进制数字，如：000 传 0，001 传 1，…，要传输按例 2.5.5 中比例出现的八进制数字 10 000 个，所需用的二进制数位为 30 000 个，这与数字出现的频率是无关的. 但若用最佳前缀码传输他们，所需用的二进制数位为：

$$(30\times100+20\times100)\times2+(15\times100+10\times100+10\times100)\times3+(5\times100)\times4+(5\times100+5\times100)\times5=27\ 500.$$

这比用长为 3 的等长码子传输节省二进制数位 2 500 个.

二、树的周游及其应用

对于一棵根树的每个顶点都访问一次且仅访问一次称为游遍一棵树或周游一棵树.

对于二元有序正则树主要有以下 3 种周游方法：

1. 中序周游法

其访问次序为：左子树，树根，右子树.

2. 前序周游法

其访问次序为：树根，左子树，右子树.

3. 后序周游法

其访问次序为：左子树，右子树，树根.

例 2.5.6 对于图2.5.6所示根树按中序、前序、后序周游的结果分别为：

$(d\bar{b}(h\bar{e}i))\bar{a}(f\bar{c}g)$；$\bar{a}(\bar{b}d(\bar{e}hi))(\bar{c}fg)$；$(d(hi\bar{e})\bar{b})(fg\bar{c})\bar{a}$.

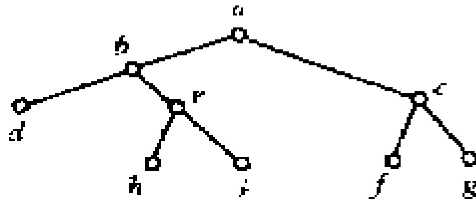


图 2.5.6

式中 $\bar{v}$ 表示 v 为根树(根子树)的树根.

利用二元有序树可以表达算式，然后根据不同的访问方法即可得到不同的算法.

需要注意的是，在利用二元有序树存放算式时，在每一步中，都应将算式(或其子式)的最高层次的运算符放在树根(或子树的树根)上，将参加运算的数放在树叶上，并规定被除数、被减数放在左子树的树叶上.

例 2.5.7 (1) 利用二元有序树表示下面算式:

$$((a-b*c)*d+e)\div(f*g+h);$$

(2) 用 3 种周游方法访问(1)中的二元有序树，写出访问结果.

解 (1) 表示算式的 2 元有序树如图 2.5.7 所示.

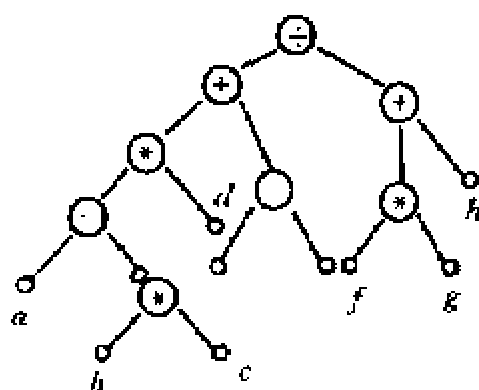


图 2.5.7

(2) 3 种访问结果分别为:

中序：$(((a-(b*c))*d)+e)\div((f*g)+h)$;

前序：$\div(+(*(-a(*bc))d)e)(+(*fg)h)$;

后序：$(((a(bc*)-)d*)e+)((fg*)h+)\div$.

为了加深对一种周游方法的理解，下面对以上 3 种访问结果做如下分析:

对于中序周游方法的访问结果，利用四则运算的规则，可去掉一些多余的括号，得到结果$((a-b*c)*d+e)\div(f*g+h)$.

这正是原式，所以中序周游方法访问，其结果正是还原算式.

对于前序周游方法的访问结果，可将全部括号去掉，得到的结果为：$\div+*-a*bcde+*fgh$.

在这个结果中规定：每个运算符号与它后面紧邻的 2 个数进行运算. 读者可自行验算，这样规定的计算结果是正确的. 在这种算法中，因为运算符在参加运算的 2 个数的前面，因而称为前缀符号法，通常也称这种算法为波兰符号法.

对于后序周游方法的访问结果，仍可以省去全部括号，得到结果为：$abc * - d * e + fg * h + \div$.

在这个结果中规定：每个运算符号与它前面紧邻的两个数进行运算. 同样可以验证，这样规定的计算结果是正确的. 在这种算法中，因为运算在参加运算的 2 个数的后面，所以称此种算法为后缀符号法，通常也称这种算法为逆波兰符号法.

习题二

1. 2,3,4,5 阶非同构的（无向）树各有多少棵？画出其图形来.

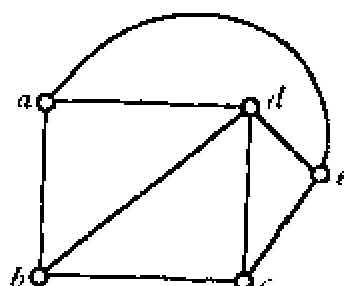
2. 设 T 为一棵树

(1) 若 T 中有 7 片树叶，3 个 3 度顶点，其余都是 4 度顶点，问 T 中有几个 4 度顶点？

(2) 若 T 中有 2 个 4 度顶点，3 个 3 度顶点，其余都是树叶，问 T 中有几片树叶？

(3) 若 T 中有 n_i 个顶点的度数为 i，其中 $i = 2,3,4\cdots,k$，而其余的顶点都是树叶，问 T 中有多少片树叶？

3. 题图 2.1 所示的图 G 中，G 有多少棵生成树（指非同构的意义下），画出其图形.



题图 2.1

4. 题图 2.2 所示图中，实边所表示的生成子图是该图的一棵生成树 T.



题图 2.2

(1) 指出 T 的所有的弦，及每条弦所对应的基本回路，以及对应 T 的基本回路系统.

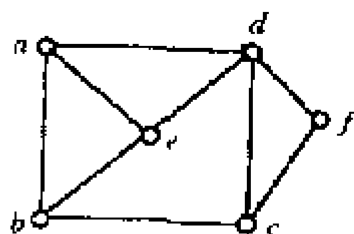
(2) 指出 T 的所有树枝，及每条树枝对应的基本割集，以及 T 对应的基本割集系统.

5. 证明 恰好有两个顶点的度数为 1 的树必为一条道路.

6. 证明 若 G 不含回路，且恰好有一棵生成树 T，则 $G=T$.

7. 用$\triangle$记图 G 中顶点的最大度. 证明 若 G 是$\triangle\geqslant k$ 的树，则 G 至少有 k 个顶点的度数为 1.

8. 用避圈法和破圈法求题图 2.3 的全部生成树.



题图 2.3

9. 画一棵带权为 0.5, 1, 2, 3.5, 4, 5, 6.8, 7.2, 10 的最优二元树，并计算它的权.

10. 下面给出的符号串集合中，哪些是前缀码?

$B_1=\{0,10,110,111\}$; $B_2=\{1,01,001,000\}$; $B_3=\{1,11,101,001,0011\}$; $B_4=\{b,c,aa,ac,aba,abb,abc\}$; $B_5=\{b,c,a,aa,ac,abc,abb,aba\}$.

11. 设 7 个字母在通讯中出现的频率如下：

a： 35% b： 20%； c： 15% d： 10%；

e： 10% f： 5%； g： 5%

(1) 以频率(或乘 100)为权，求最优二元树.

(2) 利用所求的最优二元树找出每个字母的前缀码.

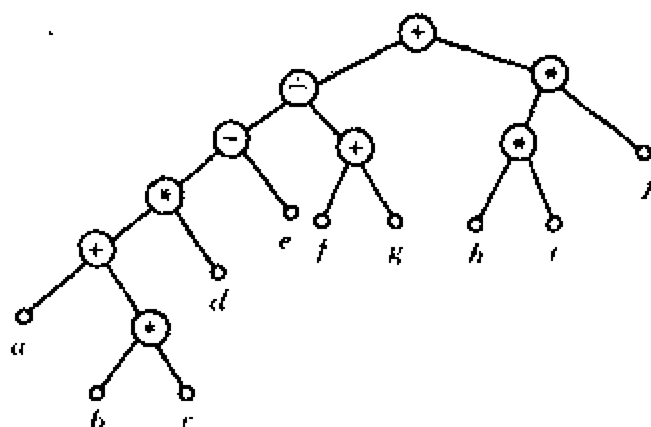
(3) 传输 10 000 个按上述比例出现的字母需要传输多少个二进制数位？比用长度为 3 的等长码子传输省了多少个二进制数位？

12. 题图 2.4 所示的二元树表达一个算式.

(1) 给出这个算式的表达式.

(2) 给出算式的波兰符号法表达式.

(3) 给出算式的逆波兰符号法表达式.

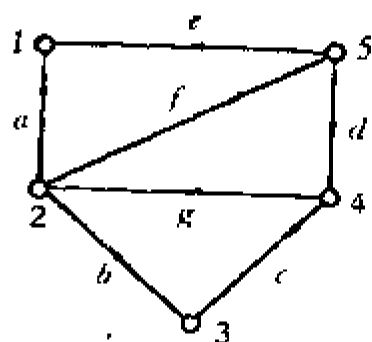


题图 2.4

13. 已知 n 阶图(简单图)的边数 m 满足：$m = n - 1$，问 G 一定是树吗？为什么？

14. 求题图 2.5 中树的数目，并画出所有的树(有向树).

15. 证明 图 G 的任一生成树和任一割集至少有一条公共边.



题图 2.5

第三章　平面图

§3.1　平面图的概念

一、平面性问题

图的平面性问题是图论中最基本的问题之一.对于图的平面性的讨论,即有其理论意义,又有其实际应用的需要.事实上,凡是涉及到在平面上进行图形布局的问题,例如:单面印刷电路板和集成电路的布线问题,工程计划网络的布置问题等,都需要用到平面性的概念.近些年来,大规模集成电路的迅速发展,也有力地促进了图的平面性的研究.

先来看一个具体例子.

例 3.1.1　一位建筑师要设计一个用于某种实际需要的单层建筑,其中共有五间房屋,每间房的面积均为确定的.

为讨论方便,将这五间房分别记为:A,B,C,D,E.这五间房的布置有下列具体要求:

(1)每一间房都要求有一面墙是外墙(即可以向户外开窗);

(2)各房间之间要满足下列条件:

①A 与 B,C,D 都相邻;

②　B 与 A,C 都相邻;

③　C 与 B,A,D 都相邻;

④　D 与 A,C,E 都相邻;

⑤　E 与 D 相邻.

根据上述各条件，建筑师画了一个平面图，如图 3.1.1 所示. 但这时，用户又提出了一个新的要求，即在原来要求的各条件之外，再加上"B 与 D 亦相邻"这样一条.

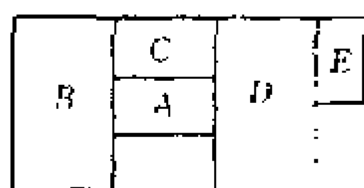


图 3.1.1

建筑师经过用图论中的平面性概念进行认真的研究后，确认用户的这个新要求是肯定不可能实现的，除非修改以前的条件.

可将这个问题具体讨论如下：

采用欧拉研究"七桥问题"的方法. 首先将房间 A,B,C,D,E 分别记为点 A,B,C,D,E；如果房间 A 与 B 相邻，则将点 A 与 B 之间连一条线，否则不连线；又因为要求各房间都至少要有一面墙是外墙，故可在图中另设一个顶点 M（表示户外），且 A,B,C,D,E 均与 M 之间有连线. 这样图 3.1.1 即可表为图 3.1.2 的形状（多了户外）：

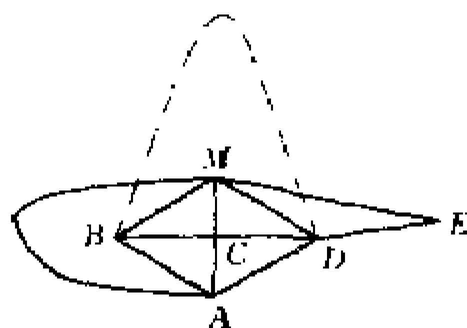


图 3.1.2

在图 3.1.2 的基础上，若再要求 B 与 D 相邻（即要求 B 与 D 之间有连线），如图中的虚线所示，知这在一个平面图中（关于平面图的定义，我们将在下面给出. 直观来看，即要求图中的线不能交叉）是办不到的. 因而用户的补充要求是不可能实现的.

例 3.1.2 图3.1.3中的几何图形，由于边和边形成交叉，故我们有理由认为该图是"非平面图形". 但图 3.1.3 显然是一个与图 3.1.4 同构的图. 而图 3.1.4 没有边形成交叉，故我们可以认定图

3.1.4 是"平面图形".

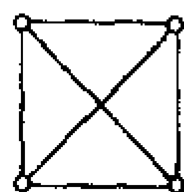


图 3.1.3

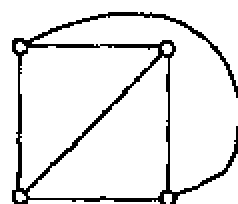


图 3.1.4

显然,图 3.1.3 与图 3.1.4 并没有本质的区别,但从直观上看,它们的平面性又是大相径庭.为了很好地解决这个问题,我们有必要对平面图形的概念做进一步的研究.

二、平面图的概念

定义 3.1.1(只讨论无向图)　如果图 G 能够画在平面上,且除端点之外,任何两条边均不相交,则称图 G 被嵌入平面上,也称 G 是一个可平面图.

已经嵌入平面上的图称为平面图.

无平面嵌入的图称为非平面图,或称该图为不可平面的.

例 3.1.3　图3.1.5所示的图 G 是一个可平面图.而如图 3.1.6 所示的图 G' 为图 G 的一个平面嵌入.图 G' 是一个平面图,从而由定义 3.1.1 知,图 G 是一个可平面图.

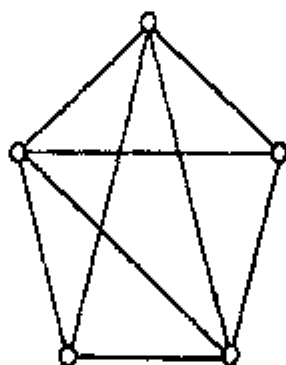


图 3.1.5

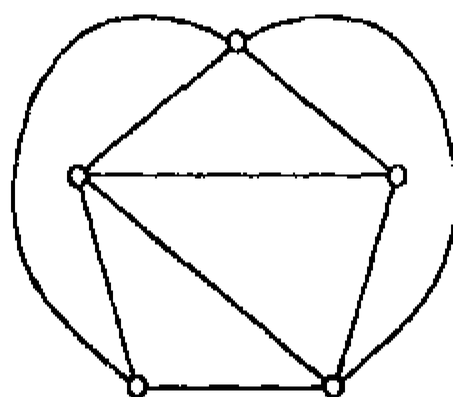


图 3.1.6

例 3.1.4 5阶完全图 K_5 是非平面图.

对此结论,我们作如下说明:

记 K_5 的 5 个顶点分别为 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5. 因完全图的各顶点之间皆有边相连,故可先建立一条道路 $v_1v_2v_3v_4v_5v_1$,见图 3.1.7.

这是一个五边形,它将平面划分为内、外两个区域. 下面考虑其它各边. 由于顶点 v_1 与 v_3 有边相连,显然将该边放在上面五边形的内部与外部均可,不妨将其放在五边形的内部(见图 3.1.8).

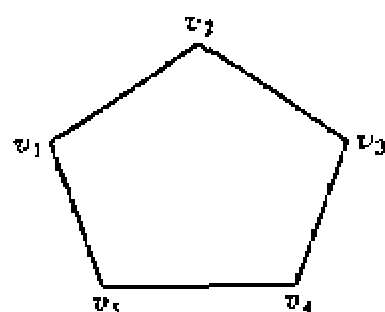


图 3.1.7

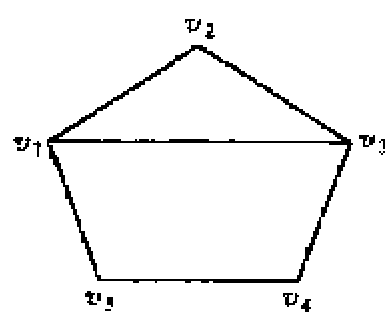


图 3.1.8

继续画出 v_2 与 v_4, v_2 与 v_5 的连线. 由于在五边形的内部已不能再画出与以前的边不相交的 v_2 与 v_4, v_2 与 v_5 的连线,故我们只能把这两条边放在五边形的外部(如图 3.1.9 所示). 接下来,边(v_3, v_5)已不能在五边形外部画出,但尚可在五边形内部画出且不与其他已画出的边相交(见图 3.1.10).

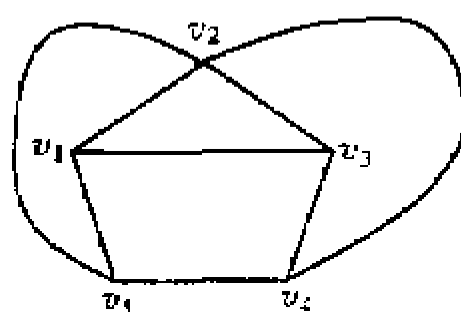


图 3.1.9

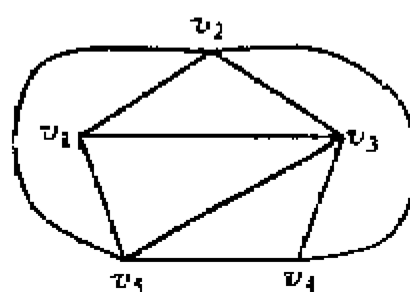


图 3.1.10

最后剩下一条边(v_4, v_1),由直观可知,无论将该边放在五边形内

部，还是将其放在五边形外部，均已不可能做到不"穿过"其他边，而使顶点 v_4 与 v_1 连接(见图 3.1.11)。

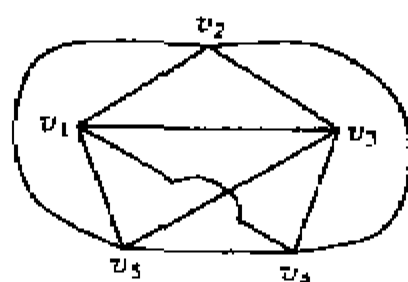


图 3.1.11

由以上讨论，即知 5 阶完全图 K_5 是不可能嵌入在一个平面上的，故由定义 3.1.1 知，K_5 是一个非平面图。

定理 3.1.1 图 G 是可平面的，当且仅当图 G 的每个分支都是可平面的。

此定理的正确性是显然的。

定义 3.1.2 设 G 是一个平面图，称 G 所限定的每一个区域均为面。特别地，有界区域称为内部面，而无界区域称为外部面。

内部面的边界是包围该面的所有边构成的"圈"(在电路理论中称之为网孔)。

例 3.1.5 图3.1.12所示的平面图中，R_1,R_2,R_3,R_4 所表示的 4 个区域均为内部面，而 R_5 所表示的区域为外部面。

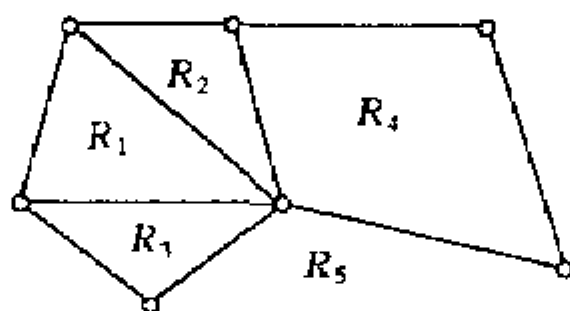


图 3.1.12

定义 3.1.3 平面图 G 中包围每个面的所有边所构成的回路

(这里的回路,可能是简单回路,也可能是若干个简单回路的并),称为该面的边界.而其边界的长度称为该面的次数.一般将面 S 的次数记为 $d(S)$.

例 3.1.6 在图3.1.13中,(a)是连通平面图,(b)是非连通的平面图.

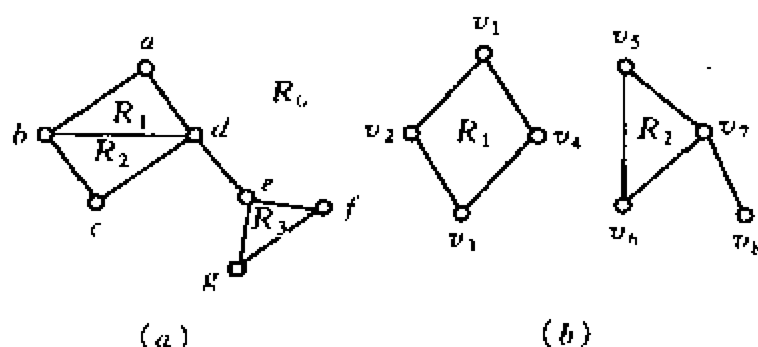


图 3.1.13

其中(a)有 4 个面,且 R_1,R_2,R_3 为内部面,R_0 是外部面.R_1 的边界为 $abda$,$d(R_1)=3$;R_2 的边界为 $bcdb$,$d(R_2)=3$;R_3 的边界为 $efge$,$d(R_3)=3$;而 R_0 的边界为 $dabcdegfed$,它是一个复杂回路,$d(R)=9$.

又,(b)有 3 个面,R_1,R_2 为内部而,R_0 是外部面.R_1 的边界为 $v_1v_2v_3v_4v_1$,$d(R_1)=4$;R_2 的边界为 $v_5v_6v_7v_5$,$d(R_2)=3$;而外部面 R 的边界是由 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 和 $v_5v_6v_7v_8v_7v_5$ 两个回路围成,$d(R)=9$.

容易验证,图 3.1.13 中的(a)和(b)中,所有面的次数之和为边数的 2 倍,即有:

定理 3.1.2 在一个平面图 G 中,所有面的次数之和为边数的 2 倍.

证明 设平面图 G 中,面数为 f,边数为 m.

显然对于 G 中的任一条边 e 来说,或者 e 是某两个面的公共边界,或者 e 出现在 G 的一个面的边界中.但无论哪种情况,在计算 G 的各面次数之和时,都要将 e 计算两次,故有

$\sum_{i=1}^{f} d(R_i) = 2m$，其中 $R_1, R_2, \cdots, R_f$ 为 G 的所有面.

我们曾经指出，对一个图 G 来说，重要的是它的顶点之间的关联关系，至于图中边的长、短、曲、直等都是无关紧要的. 但这里需要特别指出的是：对于同一个图的不同画法，它们的面也不尽相同. 例如图 3.1.14 中的 G_1 与 G_2 是两个同构的平面图，但它们的面却不相同.

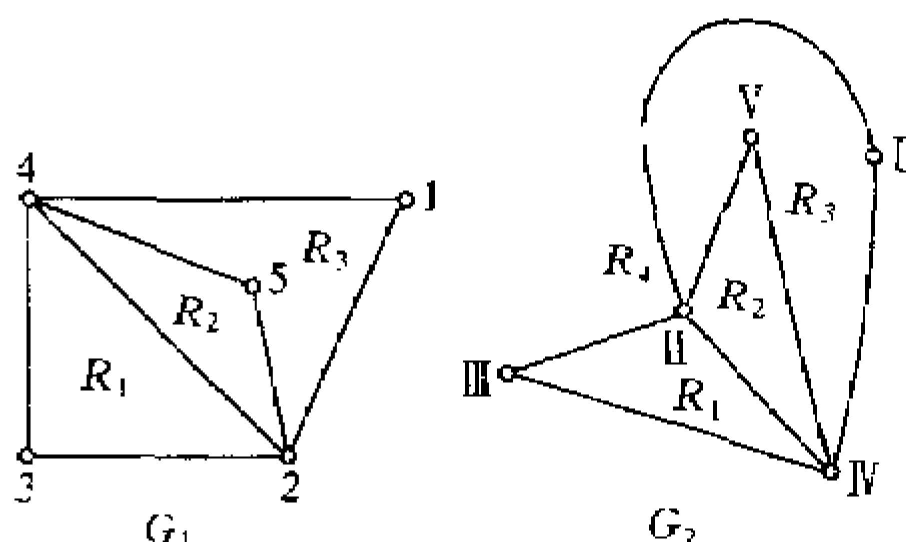


图 3.1.14

定义 3.1.3 一个连通图的平面图与它的所有面称为平面地图.

下面给出平面图的一个非常有趣的性质：对于给定的一个平面图的一种画法，其任一个内部面，总可能通过所谓"测地投影"的方法使其变成外部面.

测地投影是指：把球放置在平面上，并令球与平面的接触点为球的南极，然后用一条直线将平面上的任意一点 P 与球的北极 N 相连接（即把北极 N 点作为投影中心），此直线与球面的交点为 P'. 见图 3.1.15.

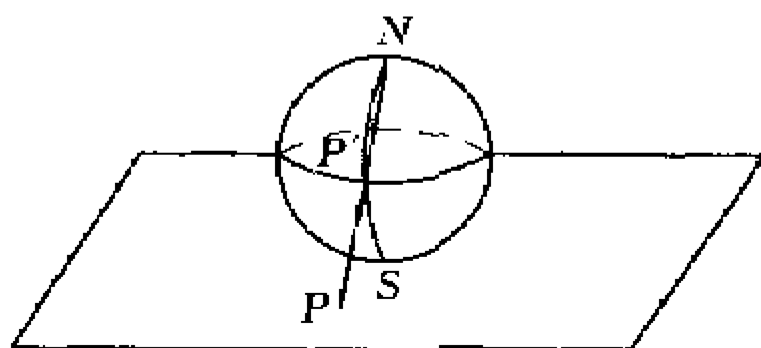


图 3.1.15

这样,平面上的点和球面上除去北极 N 的所有点之间建立了一一对应的关系,我们称这种方法为:测地投影.

下面具体给出变平面任一内部面为外部面的方法.

假设已给定了平面图 G 的一种画法,且 A 为需改成外部面的任一内部面.我们先按测地投影的方法把图 G 画到球面上去;然后在球面上与区域 A 所对应的区域内任取一点,将球转动,使该点为投影中心(即北极 N);再把球上的图以"测地投影法"画到平面上,则在图 G 的这种画法中,A 成为无界区域,即为图 G 的外部面.

定义 3.1.4 设简单图 G 为平面图.u,v 是 G 的任两个不相邻的顶点.若不能在 u,v 间增加一条边而不破坏 G 的平面性,则称图 G 是最大平面图.

定理 3.1.2 最大平面图的任何一个面都是三角形.

这里三角形是指由三条边所围成的区域,它可以是内部面,也可以是外部面.

证明 我们用反证法.

如果图 G 的平面嵌入至少有一个面不是三角形,设其为 $v_1v_2\cdots v_{n-1}v_nv_1$(这是因为 G 的任何一个面的边界均构成一个圈),且 $n\geqslant4$.为以下讨论方便,不妨设 $n=4$.

下面分两种情形讨论.

(1)若 v_1 与 v_3 不邻接,则不论 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 为内部面还是外部面的边界,增加一条边 (v_1,v_3) 后都不会破坏图 G 的平面性,这与

G 是最大平面图的假设矛盾.

(2)若 v_1 与 v_3 邻接,不妨设 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 构成图 G 的内部面的边界,从而边(v_1,v_3)必在此面的外部,此时又可分为两种情况:

① 若 v_2 与 v_4 不邻接,则增加一条边(v_2,v_4)也不会破坏图 G 的平面性,此亦与 G 是最大平面图的假设相矛盾;

② 若 v_2 与 v_4 邻接,由于 $v_1v_2v_3v_4v_1$ 是图 G 的内部面的边界,故边(v_1,v_3)与(v_2,v_4)都应在此面的外部(见图 3.1.16).显然,这样的两条边必然相交,此与图 G 的可平面性相矛盾.

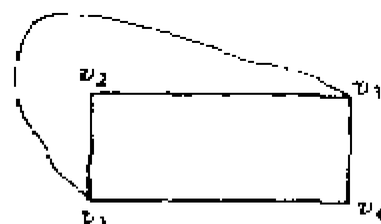


图 3.1.16

定理 3.1.3 顶点数大于等于4的最大平面图 G,其所有顶点的最小度≥3.

证明 设 $G=(V,E)$是一个最大平面图,且顶点数$|V|\geqslant 4$.

对于每一顶点 $v\in V$,$G-v$ 是一个平面图,且 v 必在 $G-v$ 的一个面内.于是子图 $G-v$ 的顶点集合中至少有三个顶点在该面的边界上,再由 G 的极大平面性,知在 G 中 v 必须与这些顶点邻接.这表明,对于 G 的任何一个顶点 $v\in V$,都有 $d(v)\geqslant 3$.若记图 G 所有顶点的最小度为$\delta(G)$,则:

$$\delta(G)=\min_{v\in V}\{d(v)\}\geqslant 3.$$

定义 3.1.5 若一个平面图嵌入平面后,它的所有顶点都在同一个面的边界上,则称该平面图为外平面图.

例 3.1.7 图3.1.17所示的图 G 即为一个外平面图.

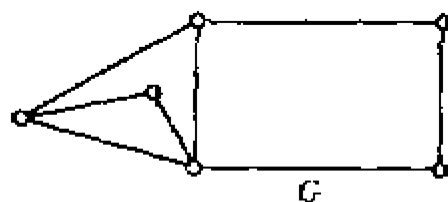


图 3.1.17

面图 3.1.18 中的(a),(b)即为图 3.1.17 中的图 G 的两个平

面嵌入.(a)中,其顶点均在内部面中;(b)中,其顶点均在一个外部面中.

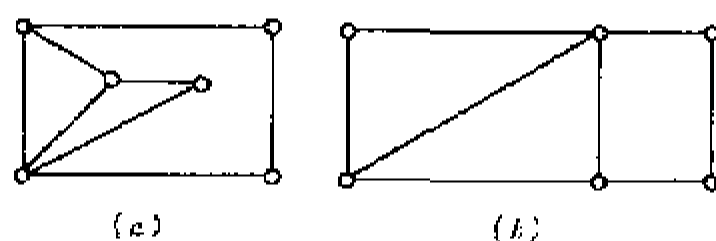


图 3.1.18

定义 3.1.6 一个简单图 G 称为最大外平面图,当且仅当不能再增加边而使其不失去外平面性.

例 3.1.8 如图3.1.19所示的三个图(a),(b),(c)中,分别给出了有六个顶点的最大外平面图的不同图形.

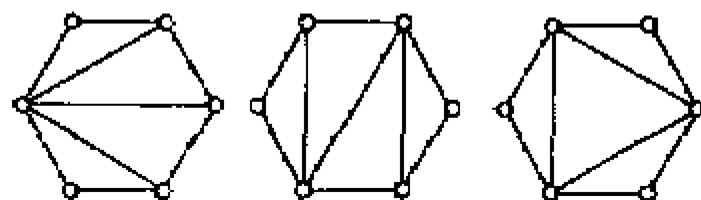


图 3.1.19

定理 3.1.4 设 G 是一个最大外平面图,且 G 有 $n\geqslant 3$ 个顶点.若 G 的 n 个顶点均在外部面上,则 G 有 $n-2$ 个内部面.

证明 显然定理的结论对 $n=3$ 来说成立.

下面假定定理对 $n=k$ 时成立,要证 $n=k+1$ 时也成立.

设 G 有 $n=k+1$ 个顶点,且有 m 个内部面.因为 G 的 $k+1$ 个顶点全在其外部面上,不难证明,G 至少有一个顶点的度数为 2.不妨设顶点 v 的度数为 2,于是子图 $G-v$ 的内部面将减少一个.从而 $G-v$ 有 k 个顶点,$m-1$ 个内部面.此时显然 $G-v$ 仍为最大外平面图,故由归纳法假设,有,

$m-1=k-2$,此即:$m=k-1=k+1-2=n-2$

证毕.

§3.2 欧拉公式

本节讨论连通平面图中顶点数、边数、面数之间的关系. 1750 年,数学家欧拉指出,任何一个凸多面体的顶点数 n、棱数 e 和面数 f 之间满足关系式: $f+n-e=2$. 实际上,这个关系对于连通的平面图也成立,这就是关于平面图的著名的欧拉公式.

定理 3.2.1(欧拉公式) 设 G 为任意的连通的平面图. G 有 n 个顶点, m 条边和 f 个面(包括内部面和外部面),则: $f+n-m=2$.

证明 在平面图 G 中逐次增加边,使 G 变成最大平面图. 显然每增加一条边,边数和面数都同时增加 1. 假设共增加 s 条边后, G 变成最大平面图 G_1,则图 G_1 的面数为 $f+s$,顶点数仍为 n,而边数变为 $m+s$. 于是有

$$(f+s)+n-(m+s)=f+n-m,$$

上式表明,将平面图 G 增加若干条边后,数值: (面数)+(顶点数)-(边数)不会改变,仍然等于 $f+n-m$.

而在最大平面图 G 中去掉顶点 v 及与 v 关联的边(即顶点 v 的关联集),即去掉 $d(v)$ 条边(及一个顶点)后得到图 G'. 因为每去掉一条边,面数就会减少 1,但当去掉与 v 关联的最后一条边时,面数将不会减少. 于是,此时 G' 的面数变为: $f-(d(v)-1)$,且 G' 的顶点数比 G 少 1,即为 $n-1$,而边数为: $m-d(v)$. 故此时有:

$$f-(d(v)-1)+(n-1)-(m-d(v))=f+n-m.$$

这表明,当在图 G 中去掉一个顶点,同时去掉与此顶点相关联的所有边后,所得新图的数值: (面数)+(顶点数)-(边数)仍不会改变,还是等于 $f+n-m$.

最后,因为最大平面图的每一个面均为三角形. 从而可以对任一连通平面图 G,连续施行上述两种变换(即先增边,再减边),最终可将 G 变成三角形,并且图 G 的 $f+n-m$ 值等于最后得到的三角形

的:(面数)+(顶点数)-(边数)之值.但对于三角形(即完全图 k_3)的 $f+n-m$ 值等于 $2+3-3=2$.

这样,我们便证明了,对于任一连通平面图 G(顶点数 $n\geqslant3$),有:$f+n-m=2$.

下面我们看一个具体的例子.

例 3.2.1 图3.2.1中所给出的连通平面图 G 中,$f=5$,$n=7$,$m=10$,对此平面图 G,我们用定理 3.2.1 中的方法,最后将其化为三角形.

(1)在图 G 中先增边,共增加 5 条边,值 G 变成最大平面图 G_1.见图 3.2.2.

此时,$f=10$,$n=7$,$m=15$.显然有 $10+7-15=5+7-10$.

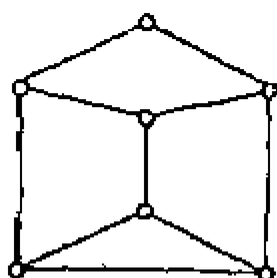


图 3.2.1

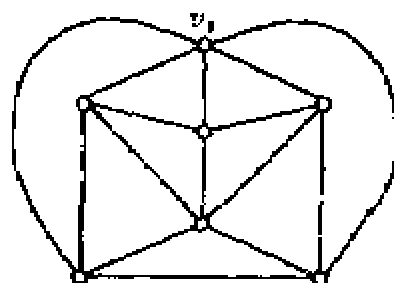


图 3.2.2

(2)在 G_1 中去掉顶点 v_1,同时去掉与 v_1 相关联的所有边,得图 G_2(见图 3.2.3).

此对,$f=6$,$n=6$,$m=10$,显然有 $6+6-10=5+7-10$.

(3)在 G_2 中增边,把 G_2 变成最大平面图 G_3(见图 3.2.4).

此时,$f=8$,$n=6$,$m=12$.

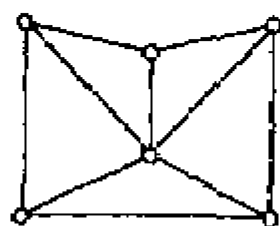


图 3.2.3

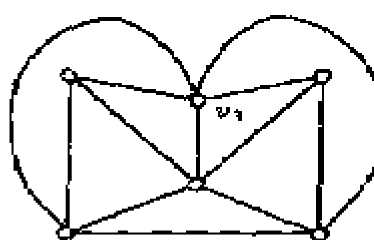


图 3.2.4

(4)在 G_3 中去掉顶点 v_3,同时去掉与 v_3 相关联的所有边,得图 G_4(见图 3.2.5).

此时,$f=4,n=5,m=7$.

(5)在 G_4 中增边,把 G_4 变成最大平面图 G_5(见图 3.2.6).

此时,$f=6,n=5,m=9$.

(6)在 G_5 中去掉顶点 v_5,同时去掉与 v_5 相关联的所有边,得 G_6(见图 3.2.7).

此时 $f=3,n=4,m=5$.

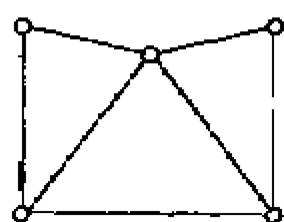


图 3.2.5

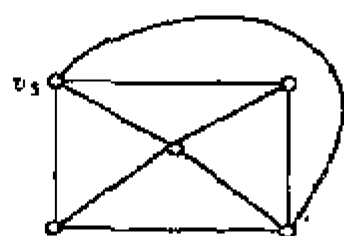


图 3.2.6

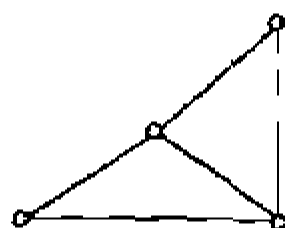


图 3.2.7

(7)在 G_6 中增边,把 G_6 变成最大平面图 G_7(见图 3.2.8).

此时,$f=4,n=4,m=6$.

(8)在 G_7 中去掉顶点 v_7,同时去掉与 v_7 相关联的所有边,得到一个三角形 G_8(图 3.2.9).

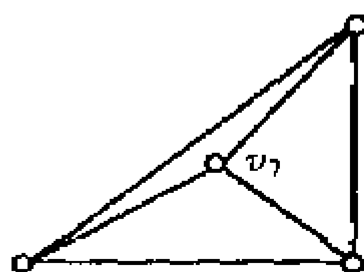


图 3.2.8

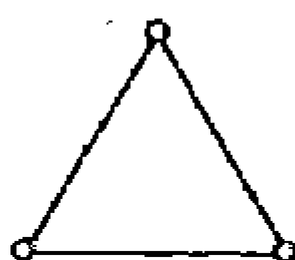


图 3.2.9

显然,此时 $f=2,n=3,m=3$,且有 $2+3-3=5+7-10=2$

前面说过,欧拉公式 $f+n-m=2$ 是欧拉研究凸多面体时所得到的结论.即对于一个有 n 个顶点,m 条棱,f 个面的凸多面体,成

立 $f+n-m=2$. 对此可证明如下：

事实上，一个凸多面体的任意两条棱除端点外，均不相交，故可将其在一个球面上表示出来. 于是可在其某一面里任取一点，以此点为中心，作测地投影，即可将凸多面体在平面上表示出来，所得之图即为与该凸多面体相应的平面图. 且凸多面体的棱对应该平面图的边，顶点对应平面图的顶点，且凸多面体的面也与该平面图的面是一一对应的，故由定理 3.2.1，知公式：$f+n-m=2$ 成立.

由欧拉公式，可得如下结论（下面均指连通图）.

推论 1 若平面图 G 的每个面的边界都是由 s 个边构成的回路（或称之为长是 s 的圈），则 $m=\dfrac{s(n-2)}{s-2}$，其中，n 为图 G 的顶点数，m 为 G 的边数，且 $s>2$.

证明 设 G 有 f 个面，则因每条边都在 G 的两个面的边界上，且每个面次数均为 s，故有

$$sf=2m\text{，即 } f=\frac{2m}{s},$$

将其代入欧拉公式，有

$$2=f+n-m=\frac{2m}{s}+n-m\text{，解出 } m \text{ 即得}$$

$$m=\frac{s(n-2)}{s-2}.$$

推论 2 设 n 阶简单图 G 是平面图，且 $n\geqslant 3$，m 为图 G 的边数，则有：$m\leqslant 3n-6$.

证明 由于最大平面图的面都是 3 阶完全图 K_3，即最大平面图的每个面的边界都是长为 3 的圈，故由推论 1 有：

$$m=\frac{3(n-2)}{3-2}=3(n-2)=3n-6.$$

又因为平面图的边数不大于最大平面图的边数，故对 n 阶平面图有：$m\leqslant 3n-6$.

推论 3 5阶完全图 K_5 是不可平面的.

证明　K_5 中，$n=5$，$m=10$，若 K_5 是可平面的，则由推论 2，应有 $m\leqslant 3n-6$，显然这是一个矛盾.

推论 4　若简单图 G 是平面图，且 G 中不含3阶完全图 K_3，则 $m\leqslant 2n-4$（其中，n 为顶点数，m 为边数）.

证明　设 G 有 f 个面，且这 f 个面分别为 n_1 边形，n_2 边形，$\cdots$，n_f 边形，而因为 G 中不含 K_3，故　$n_i\geqslant 4$，$i=1,2,\cdots,f$.

又因 G 的每条边均在 G 的两个面的边界上，故，$\sum\limits_{i=1}^{f}n_i=2m$，且由 $\sum\limits_{i=1}^{f}n_i\geqslant 4f$，可得 $4f\leqslant 2m$，即　$f\leqslant\dfrac{m}{2}$，再由欧拉公式，即有

$$2=f+n-m\leqslant\frac{m}{2}+n-m=n-\frac{m}{2},$$

故有 $4\leqslant 2n-m$，亦即 $m\leqslant 2n-4$.

推论 5　完全二部图 $K_{3,3}$ 是不可平面的.

证明　完全二部图 $K_{3,3}$ 的顶点数 $n=6$，其边数 $m=9$. 因为 $K_{3,3}$ 中不含 3 阶完全图 K_3，故若 $K_{3,3}$ 可平面，则由推论 4 有 $m\leqslant 2n-4$，即应有 $9\leqslant 2\times 6-4=8$，显然这是不可能的. 此矛盾表明 $K_{3,3}$ 是不可平面的.

推论 6　设 G 有 n 个顶点 m 条边的可平面图，若 $n\geqslant 4$，则 G 中至少有 4 个顶点的度数不能超过 5.

证明　不妨设 G 是最大可平面图.

如果 G 中至少有 $n-3$ 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_{n-3}$ 的度数超过 5，则由定理 3.2.3 及本节推论 2 有 $6(n-3)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n-3}d(v_i)=$

$2m-(d(v_{n-2})+d(v_{n-1})+d(v_n))\leqslant 2m-9\leqslant$

$2(3n-6)-9=6n-21$,

这表明：$6n-18\leqslant 6n-21$，矛盾.

利用完全二部图 $K_{3,3}$，是不可平面的这一性质，可以解决下面十分有趣的一个问题.

例 3.2.2　今有 A，B，C 三家分别住在 v_1，v_2，v_3 三处，但三家

彼此交恶，从不往来．又用 v_4, v_5, v_6 分别表示公用水井、商店和邮局．见图 3.2.10.

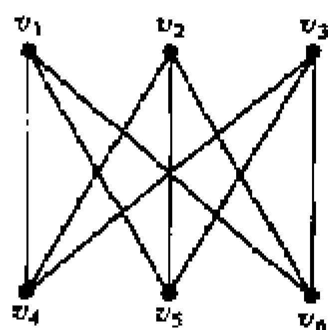


图 3.2.10

现在 A, B, C 三家想各自修三条路分别到达 v_4, v_5, v_6，且又不会在路上碰见其他家的人，问是否可以办到？

显然由图 3.2.10 知，这是一个完全二部图 $K_{3,3}$，故由推论 5 知，满足要求的九条路是不存在的，即答案是办不到．

从以上讨论，我们可得如下结论：

1．顶点数 $n=3$ 的图是平面图；

2．顶点数 $n=4$ 的图是平面图；

3．顶点数 $n \geqslant 5$ 时，该图就不一定是平面图了．如 5 阶完全图 K_5 和完全二部图 $K_{3,3}$ 即为 5 个顶点及 6 个顶点的非平面图的简单例子．鉴于 K_5 和 $K_{3,3}$ 的特殊作用，一般图论的书中称其为库拉托斯基图．

下面利用库拉托斯基图（即 K_5 和 $K_{3,3}$）给出一个连通图是可平面的充分且必要条件．

为此，我们先给出“同胚”的概念．

定义 3.2.1 若图 G' 可由图 G 经过下列变换而得到：移去 G 的边 $e=(v_1, v_2)$，再添上一个新的顶点 v，并且使顶点 v 与顶点 v_1，v_2 都邻接，则称 G 与 G' 是同胚的．

例 3.2.3 图 3.2.11 所示的图 G 与图 3.2.12 所示的图 G_1，G_2，G_3 均是同胚的．

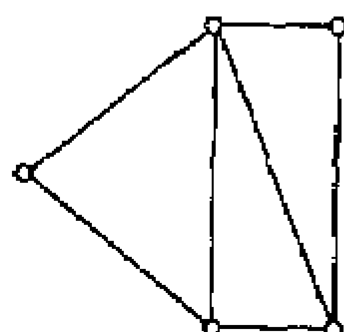


图 3.2.11

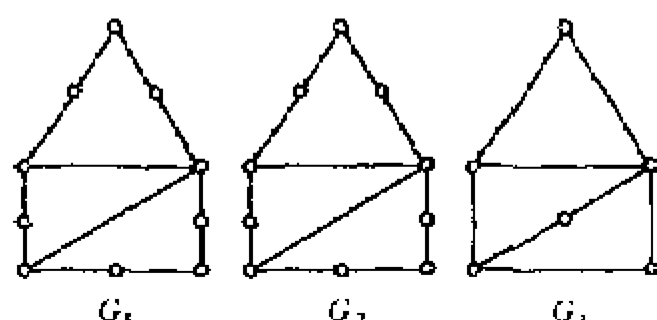


图 3.2.12

例 3.2.4 库拉托斯图 K_5 和 $K_{3,3}$分别与图 3.2.13 中的(a)与(b)同胚.

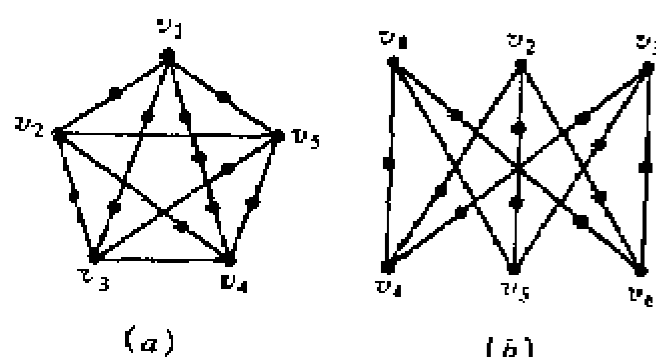


图 3.2.13

定理 3.2.2 （库拉托斯基定理） 一个连通图 G 是可平面的，当且仅当 G 不含同胚于K_5、$K_{3,3}$的子图.

正是由于此定理人们才称 K_5 和 $K_{3,3}$为库拉托斯基图.

但库拉托斯基定理证明较繁，需要许多预备知识，已超出本书的讨论范围，故这里将证明略去.

§3.3 对偶图与五色定理

定义 3.3.1 设 G 是平面图，如果 G 的两个面的边界至少有一条公共边，则称这两个面是相邻的.

下设 G 是有 n 个顶点，m 条边和 f 个面的平面图，且记 G 的 f 个面为 $S_1, S_1, \cdots, S_f$.

定义 3.3.2 在图 G 的每个面 $S_i(i=1,2,\cdots,f)$ 中放置一个顶点 v_i^*，如果 S_i 和 S_j 相邻，则用边 (v_i^*, v_j^*) 连接 v_i^* 和 v_j^*，使它与面 S_i, S_j 的公共边只相交一次，此时，称 (v_i^*, v_j^*) 与所相交的边为对应边，且 (v_i^*, v_j^*) 与 G 的其他边界无交点，这样得到的图 G^* 称为图 G 的对偶图.

显然，图 G 的对偶图 G^* 有 f 个顶点和 m 条边.

例 3.3.1 在图3.3.1所示的平面图 G(图中实线)的 4 个面中，分别放置 4 个顶点 $v_1^*, v_2^*, v_3^*, v_4^*$.

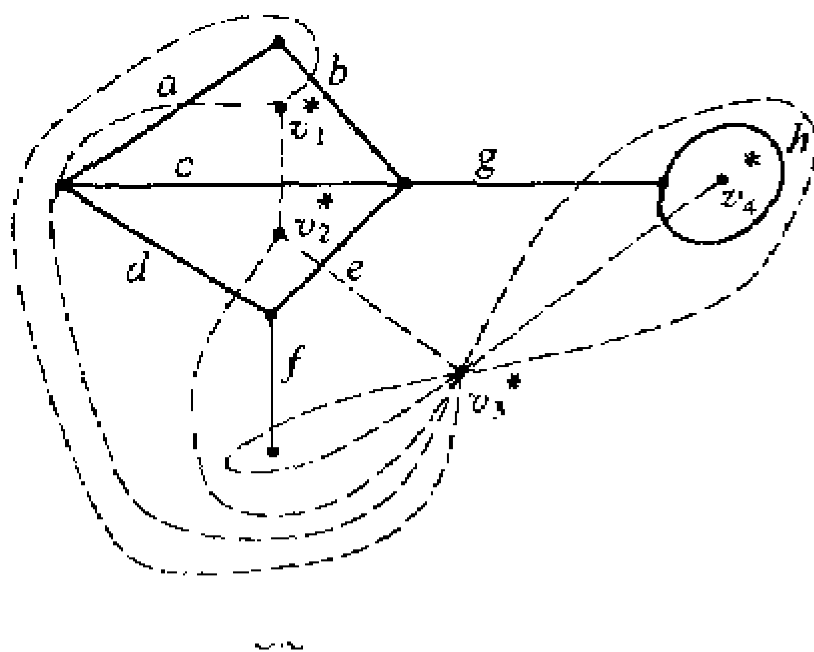


图 3.3.1

连接 v_1^* 和 v_2^* 与边 c 相交；连接 v_1^* 和 v_3^* 分别与边 a, b 相交；连接 v_2^* 和 v_3^* 分别与边 d, e 相交；连接 v_3^* 和 v_4^* 与环 h 相交；与边 f, g 相交的是环 (v_3^*, v_3^*)，这样得到的图 G^*(图 3.3.1 的虚线)即为图 G 的对偶图.

定理 3.3.1 平面图 G 的对偶图是连通的.

证明 把图 G 画在平面 π 上，在 G 的对偶图 G^* 中任取两个顶

点 v_i^* 和 v_j^*（它们分别在 G 的面 S_i 和 S_j 中）. 因为 G 中的顶点数是有限的，故我们可以在平面 π 上画一条从 v_i^* 到 v_j^* 的边 e，使 e 不经过 G 中的任何顶点. 设 G 中与边 e 相交的边是 $e_1, e_2, \cdots, e_r$.

下面考虑 G^* 中和 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 相对应的边 $e'_1, e'_2, \cdots, e'_r$ 组成的子图 G'. 因为边 e 一一穿过一些边一直画到 v_j^*，虽然这种画法有些边可能重复，但是，显然在子图 G' 中顶点 v_i^* 和 v_j^* 之间有一条道路，又因为这对于 G^* 中的任意两个顶点 v_i^*，v_j^* 均成立，故 G^* 是连通的.

显然，当 G 是连通图时，若 G^* 是 G 的对偶图，则 G 也是 G^* 的对偶图.

得到图 G 的对偶图 G^* 以后，在图 G 上的许多问题可以转化为相应的对偶图的问题. 我们知道，一个图的着色（或染色）是指它的顶点的着色，但我们利用对偶图的概念，即可将点着色问题转化为面着色问题，反之亦然.

在图论中，也是在数学中，一个著名的一直到现在还没有得到解决的问题就是所谓“四色猜想”问题.

“四色猜想”是说：一个平面地图只需要用 4 种颜色来着色，就可以使得平面地图中任两个相邻的地区没有相同的颜色. 这里要求每一个地区必须是由一个单连通区域构成的，而两个地区相邻，是指这两个地区有一段公共的边界（而不是仅只有一个公共点）.

定义 3.3.3 平面地图 G 的着色，是指对 G 的每一个面指定一种颜色，使得没有两个相邻的面有相同的颜色.

若只用 n 种或更少种颜色即可对一个平面地图 G 进行着色，则称 G 是 n - 可着色的.

由此定义，四色猜想可叙述为：每一个平面地图是 4 - 可着色的.

关于四色猜想的起源有一种说法是，麦比乌斯（Mobious）早在1840年就已经熟悉这个问题了. 但可以肯定的是，1850 年格思里（Guthrie）曾经把四色猜想转告给德·摩根（De Morgan）.

四色猜想是一个至今仍没有得到理论证明的一个数学难题. 1976年,美国阿普尔(K. Appel),黑肯(W. Hakan)和考齐(J. Koch)等三位数学家声称他们借助于电子计算机,耗时1 200个小时,做了近百亿次判断后,证明了四色猜想. 只可借后来发现有错误. 虽然如此,一百多年来,人们在试图证明四色猜想的不懈努力过程中,作了许多有益的工作,也极大地促进了图论学科的飞速发展.

我们曾借出,一个图的着色是指它的顶点的着色,而一个平面地图的着色却是借它的面的着色. 对此,我们有下面的定理.

定理 3.3.2 平面地图 G 是 n - 可着色的与图 G^* 是 n - 可着色的说法是等价的(G^*着色指顶点着色).

证明 令 G^* 是 G 的对偶图. 因为 G 的两个面是邻接的当且仅当G^*的对应顶点是邻接的. 所以由图 G^* 是 n - 可着色的(指顶点着色!),即得到图 G 是 n - 可着色的(指面着色!)

反之,假定平面地图是 n - 可着色的,而令 H 是任何一个可平面图,不失一般性,假定 H 是一个连通的平面图. 再令 H^* 是 H 的对偶图,并且将 H^* 画成它的每一个面正好包含 H 的一个顶点. 在 H^* 的每一个自环(指由一个顶点出发,不经任何其他点,又回到该点的边)中插入一个新顶点;这样,连通的平面图 H^* 就变成一个平面地图 H'. 且 H' 的 n - 可着色(指面着色!)就蕴含着 H 是 n - 可着色(指顶点着色!)的.

下面我们来证明五色定理.

定理 3.3.3 每一个可平面图是5 - 可着色的.

证明 对顶点个数 n 作归纳法.

假定所有有 $n-1(\geqslant 5)$个顶点的可平面图是 5 - 可着色的.

设 G 是一个有 n 个顶点的可平面图,则由 §3.2,推论 6,知 G 至少含有一个度为 5 或小于 5 的顶点 v_0,由归纳法假设,$G-v_0$ 是 5 - 可着色的.

考虑用一种方法指定 $G-v_0$ 的顶点的着色,使之产生一个 5 - 着色,其中颜色用 c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 表示. 如果某种颜色,例如 c_j 确实

没有用于邻接于 v_0 的顶点的着色，则可将 v_0 指定为着色 c_j，就产生 G 的一个 5 - 着色. 于是我们下面仅考虑 $d(v_0)=5$，而且五种颜色都被用来给与 v_0 邻接的顶点着色.

必要时可置换颜色的编号，使从 c_1, c_2, c_3, c_4 和 c_5 着色的顶点依次环绕 v_0 排列，现在把与 v_0 邻接的顶点中用颜色 c_i 着色的顶点即标以 v_i($i=1,2,3,4,5$). 见图 3.3.2.

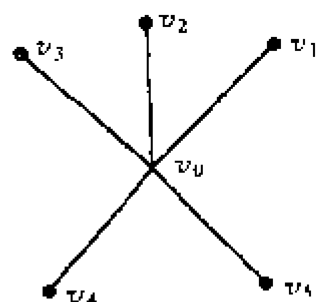


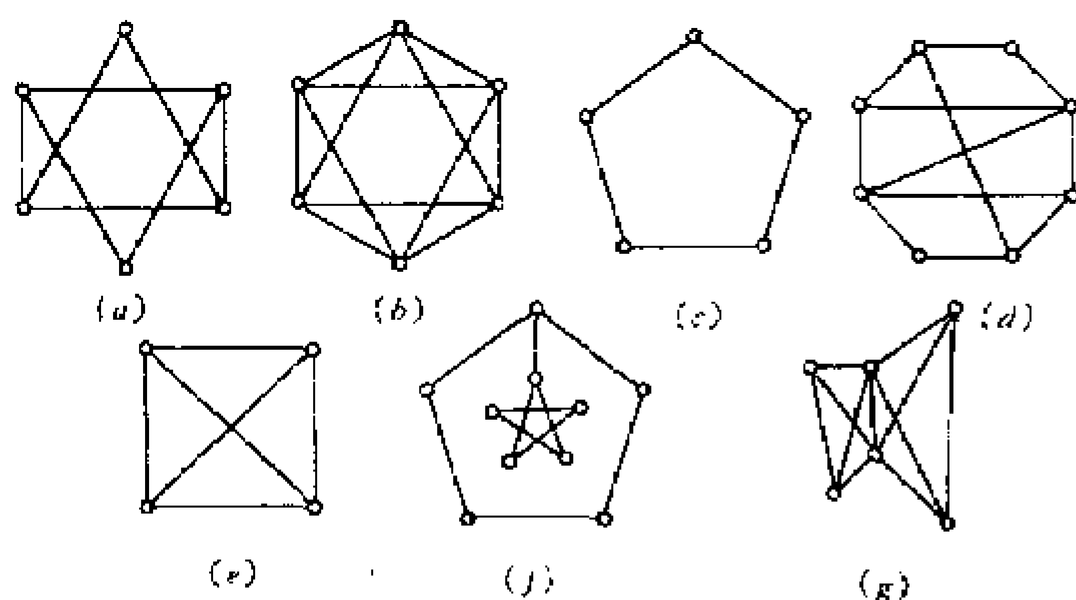
图 3.3.2

令 G_{13} 是图 $G-v_0$ 的一个子图，它是由用 c_1 或 c_3 着色的顶点导出的. 若 v_1 和 v_3 属于 G_{13} 的不同的分支，则在 G_{13} 的含 v_1 的分支中交换用 c_1 着色的顶点和用 c_3 着色的顶点的颜色，导出 $G-v_0$ 的另外一个 5 - 着色. 但是在这个 5 - 着色中，邻接于 v_0 的顶点没有一个用 c_1 着色. 所以用 c_1 将 v_0 着色，即得到 G 的一个 5 - 着色.

另一方面，若 v_1 和 v_3 属于 G_{13} 的同一分支，则在 $G-v_0$ 中存在一条 v_1-v_3 的道路，它的所有的顶点都用 c_1 或 c_3 着色. v_1-v_3 道路与 $v_1v_0v_3$ 道路构成一个圈，它把 v_2 包含在它里面，或者同时把 v_4 和 v_5 包含在它里面. 在任何一种情况下，存在联结 v_2 和 v_4，并且全部顶点用 c_2 或 c_4 着色的道路. 从而，如果令 G_{24} 是 $G-v_0$ 的由用 v_2 或 v_4 着色的顶点导出的子图，则 v_2 和 v_4 属于 G_{24} 的不同的分支. 于是，在 G_{24} 的含有 v_2 的分支中交换用 c_2 着色的顶点与用 c_4 着色的顶点的颜色，导出 $G-v_0$ 的又一个 5 - 着色，其中没有一个与 v_0 邻接的顶点用 c_2 着色. 于是，我们可以将 v_0 指定为颜色 c_2，而得到图 G 的一个 5 - 着色.

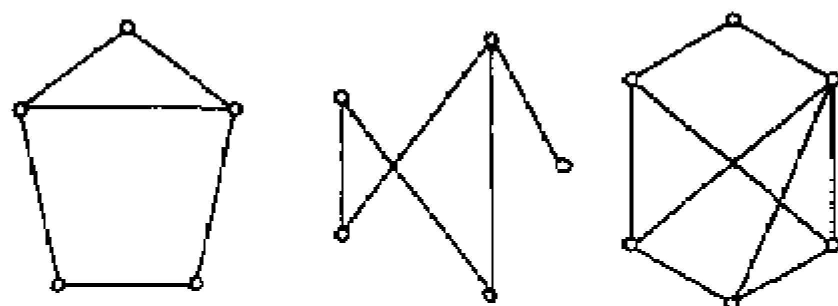
习题三

1. 指出题图 3.1(a)～(g)中哪些图是可平面图？哪些是不可平面图？并对其中的可平面图作出它的一个平面嵌入.



题图 3.1

2、题图 3.2 中各图是否是最大可平面图？若不是，试在图中加边，使其成为最大可平面图.



题图 3.2

3、若图 $G=(V,E)$ 适合：$n\leqslant 3m-6$，其中 $|V|=n$，$|E|=m$，则 G 一定是最大可平面图吗？为什么？

4. 证明：(1) 对 K_5 的任一边 e，K_5-e 是可平面的；

(2) 对 $K_{3,3}$ 的任一边 e，$K_{3,3}-e$ 是可平面的.

5. 若平面图 G 和它的对偶图 G^* 同构，则称图 G 为自对偶图. 证明 若 G 是自对偶图，则 $m=2n-2$.

6. 证明：一个平面图 G 的对偶图 G^* 是欧拉图，当且仅当 G 的

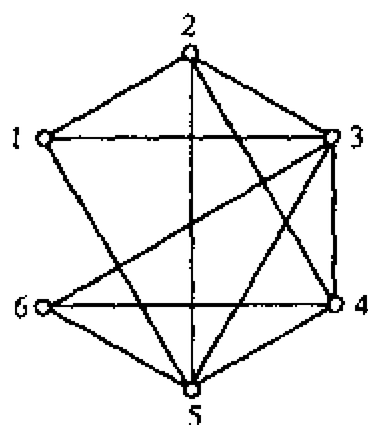
每个面的次数均为偶数.

7. 证明:平面欧拉图的对偶图是二部图.

8. 画出所有非同构的 6 阶 11 条边的连通的简单非平面图.

9. 试画出一个自对偶图 G.

10. 题图 3.3 所示的图是平面图吗? 是最大平面图吗?



题图 3.3

11. 今有工人甲、乙、丙去完成任务 a,b,c. 已知甲能胜任 a,b,c 三项任务;乙能胜任 a,b 两项任务;丙能胜任 b,c 两项任务. 试给出三种不同的安排方案,使每个工人完成他们能胜任的任务.

12. 今有 a,b,c,d,e,f,g7 个人,已知下列事实:

(1) a 会讲英语;

(2) b 会讲英语和汉语;

(3) c 会讲英语、意大利语和俄语;

(4) d 会讲日语和汉语;

(5) e 会讲德语和意大利语;

(6) f 会讲法语、日语和俄语;

(7) g 会讲法语和德语.

试问这 7 个人应如何安排座位,才能使每个人都能和他身边的人交谈?

13. 某工厂生产由 6 种不同颜色的纱织成双色布. 已知每种颜色至少分别和其他 5 种颜色中的 3 种颜色相搭配. 证明可以挑出 3

种双色布,它们恰好有 6 种不同的颜色.

注 12、13 两题需找哈密顿回路.

第四章 匹配理论、色数问题

§4.1 最大匹配

先看一个实际问题:为 n 个工作人员安排 m 项工作任务.

n 个人用$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示,m 项任务用$(y_1,y_2,\cdots,y_m)$表示.显然,并不是所有的工作人员都能从事任何一项工作.比如,x_1 能做 y_1,y_2 两项工作;x_2 能做 y_2,x_3 两项工作等等.问应如何安排各项工作,才能做到最大限度地使所有的任务都有人去做,同时也使得更多的人有工作.

如下图 4.1.1 中,取 $n=m=5$.其中 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,表示 5 个人;y_1,y_2,y_3,y_4,y_5 表示 5 项工作任务.且满足:x_1 能做 y_1,y_2 两项工作;x_2 能做 y_2,y_3 两项工作;x_3 能做 y_2,y_5 两项工作;x_4 能做 y_3 一项工作;x_5 能做 y_3,y_4,y_5 三项工作.

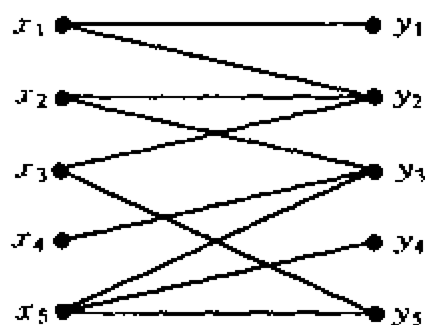


图 4.1.1

图中,若 x 能做 y 工作,则将 x,y 间连一条线.问题即变为,如何连接 x 到 y 间的线段,使得从每一点出发有且仅有一条线段.

所谓“匹配”问题，就是要从所给定的图中，找出一个有关边的子集，使得每一个顶点最多只能与这个子集中的一条边相关联.匹配问题是图论中的十分重要的内容，也是图论的一个非常活跃的研究领域.匹配理论在研究所谓“人员分配问题”和“最优分配问题”中，都有着极其重要的应用.

先来介绍几个基本概念.

定义 4.1.1 设 M 是图 $G=(V,E)$ 的边集 E 的一个子集，如果 M 中任意两条边在 G 中均不邻接，则称 M 是图 G 的一个匹配.同时称 M 中一条边的两个端点在 M 下是配对的.

定义 4.1.2 若匹配 M 的某条边与顶点 v 相关联，则称 M 饱和顶点 v，并且也称顶点 v 是 M-饱和的.否则，称 v 是 M 不饱和的.

例 4.1.1 图4.1.2所示的图中，实线与虚线均表示图 G 的边，而实线表示匹配 M 的边.

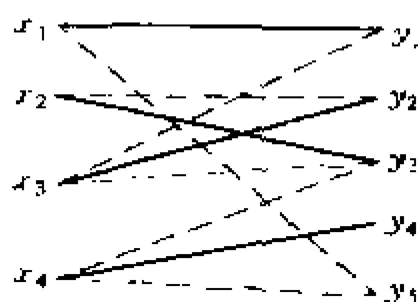


图 4.1.2

图中，x_1 与 y_1、x_2 与 y_3，x_3 与 y_2，x_4 与 y_4，分别在 M 下是配对的，并且顶点 y_5 是 M 不饱和的，而其余顶点均是 M-饱和的.

定义 4.1.3 设 M 是图 $G=(V,E)$ 的一个匹配，其边在 $E\setminus M$ 和 M 中交错出现的道路(即这条道路是由属于 M 的边和不属于 M 的边交替出现所组成的)，则称这条道路为 G 的一条 M-交错道路，或简称为图 G 的一条交互道.

特别，对于起点和终点都是 M-不饱和点的交互道，称为一条

M - 可增广道路.

显然,当 $E \setminus M$ 的一条边的两个端点均非饱和点时,这条边本身也是一条 M - 可增广道路.

例如,在例 4.1.1 的图 4.1.2 中,对于所给的匹配 M 来说,$x_1y_1x_3y_2x_2y_3x_4y_4$ 便是一条从 x_1 到 y_4 的交互道.

由于可增广道路的两个端点均为非饱和点,且非 M 的边与 M 的边交替出现,故可增广道路的边必然为奇数,且非 M 的边比 M 的边多一条.于是,对于可增广道路来说,只要改变一下匹配关系,即只需把这条道路上非 M 的边改为属于 M 的边,而同时将 M 的边改为非 M 的边,就可使匹配的边数增加一条.

例 4.1.2 如图4.1.3(a)中所示的图中,实线表示匹配 M,且道路 $x_2y_1x_1y_2x_4y_4x_5y_5$ 是一条可增广道路.若对其改变匹配关系,即将该道路中 M 的边与非 M 的边互换,则可得到一个新的匹配,见图 4.1.3(b),显然(b)中匹配的边数比(a)中多了一条.

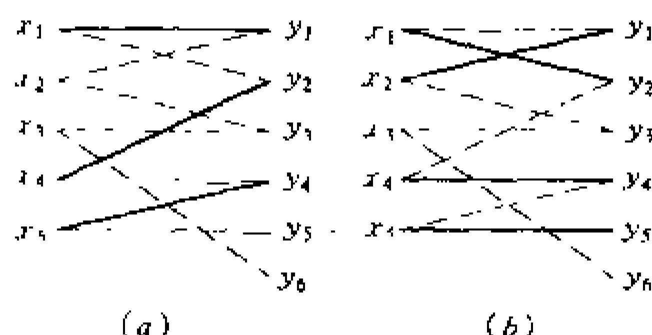


图 4.1.3

定义 4.1.4 设 M 是图 G 的一个匹配.若不存在 G 的另外的匹配 M',使得 $|M'|>|M|$,则称 M 是 G 的最大匹配.其中,$|M|$ 表示匹配 M 所包含的边数.

例 4.1.3 图4.1.4所示的两个图(a)与(b)均为最大匹配.其中,实线表示匹配的边.

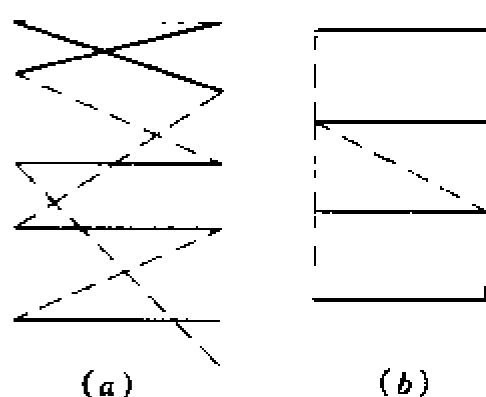


图 4.1.4

下面给出集合的对称差的定义：

定义 4.1.5 设 A，B 是两个集合. A 与 B 的对称差(也称为环和)为：

$$A \oplus B=(A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

如图 4.1.5 所示，图中阴影部分为集合 A 与 B 的交集：$A \cap B$，而空白部分即为对称差：$A \oplus B$.

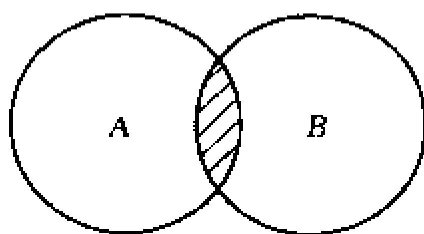


图 4.1.5

定理 4.1.1 图 G 的一个匹配 M 是最大匹配的充分且必要条件是：G 不包含 M 可增广道路.

证明 必要性：设 M 是最大匹配，来证明 G 中不存在 M 可增广道路.

我们用反证法.

设 M 是最大匹配，并且存在一条 M 可增广道路 P，由前面讨论知，P 中的边数必为奇数，记为 $P: v_0 v_1 v_2 \cdots\cdots v_{2m} v_{2m+1}$.

其中，(v_0, v_1)，(v_2, v_3)，$\cdots$，(v_{2m}, v_{2m+1}) 均为非匹配 M 的

边，而$(v_1,v_2),(v_3,v_4),\cdots,(v_{2m-1},v_{2m})$为匹配 M 的边. 记 $E(P)$为可增广道路 P 的边的集合，即

$$E(P)=\{(v_0,v_1),(v_1,v_2),\cdots,(v_{2m},v_{2m+1})\}.$$

再令 $M'=M\oplus E(P)=(M\cup E(P))\setminus(M\cap E(P))=(M\cup\{(v_0,v_1),(v_1,v_2),\cdots,(v_{2m},v_{2m+1})\}\setminus\{(v_1,v_2),(v_3,v_4),\cdots,(v_{2m-1},v_{2m})\}$.

则集合 M'本身也是一种匹配，且显然满足：

$|M'|\geqslant|M|+1>|M|$，这与假设 M 是最大匹配矛盾.

充分性　现设 G 中不存在关于匹配 M 的可增广道路，我们来证明 M 是最大匹配.

仍用反证法.

如果 M 不是最大匹配，则一定存在 G 的一个匹配 M_1，使得：

$$|M_1|>|M|.$$

作环和 $M_2=M_1\oplus M$，则有：

(1)因 M_1 和 M 都是匹配，故 M_1 与 M 各自的边之间没有共同的顶点，且 M_2 是由 M_1 和 M 中非共同部分组成的，故 M_2 中任何连通的道路必然是交替出现 M_1 和 M 的边；

(2)又由于$|M_1|>|M|$，所以对于上面(1)中所出现的关于 M_1 和 M 的交互道中，至少存在一条这样的交互道 P，使得 P 中属于 M_1 的边多于属于 M 的边. 显然，P 只能是从 M_1 的边开始，且同时以 M_1 的边为结束的交互道. 这表明，交互道 P 恰为关于匹配 M 的一条可增广道路，显然这与充分性假设矛盾.

注　定理 4.1.1 不仅给出了一个匹配是最大匹配的充要条件，而且为我们提供了一种寻找最大匹配的具体方法.

事实上，对于任意一个事先给定的匹配，先在 G 中寻找是否存在可增广道路，若存在，则可按定理 4.1.1 的证明中给出的方法修改匹配，并且可反复进行，直到不存在可增广道路为止，即可得到一个最大匹配.

定义 4.1.6　设 A 是图 G 的任一顶点子集，G 中与 A 的顶点

邻接的所有顶点的集合，称为 A 的邻集，并将其记作 $N_G(A)$.

设 G 是一个具有二分划(V_1,V_2)(这里 V_1,V_2 均为顶点集 V 的子集.且满足：$V_1\cup V_2=V,V_1\cap V_2=\varnothing$)的二部图.在许多应用中总是希望能找到 G 的一个匹配 M，使它饱和 V_1 的每个顶点.

定理 4.1.2 设 $G=(V_1,V_2,E)$是一个二部图，则 G 含有饱和 V_1 的每个顶点的匹配的充要条件是对所有的 $A\subseteq V_1$，$|N_G(A)|\geqslant|A|$.

证明 必要性：设图 G 含有匹配 M，它饱和 V_1 的每个顶点.并设 A 是 V_1 的任一个子集.

由题设知 A 的每个顶点在 M 下和 $N_G(A)$中相异的顶点配对，故显然有 $|N_G(A)|\geqslant|A|$.

充分性：若对于任何 $A\subseteq V_1$，恒有 $|N_G(A)|\geqslant|A|$.可按照如下的办法作出匹配 M，使得 V_1 关于匹配 M 饱和.

先作任意一个初始匹配，若已使 V_1 饱和，则定理已被证明.

下设 V_1 中至少有一个顶点 v 非饱和，则可检查从顶点 v 出发，而终点在 V_2 中的交互道，这时可能有如下两种情况发生：

(1)没有任何一条从 v 出发的交互道可以到达 V_2 中的非饱和点.这时，由于从顶点 v 开始的一切交互道的终点还必在 V_1 中.这表明，必存在 V_1 的某个子集 A，使得：$|N_G(A)|<|A|$.这与必要性假设矛盾，故此种情形不可能发生.

(2)存在一条从 v 出发的交互道，其终点为 V_2 中的非饱和点，显然这条道路就是一条可增广道路，于是我们可以改变匹配，使得顶点 v 关于新的匹配饱和.

重复以上的过程，即可找出 G 的一个匹配 M，使 M 饱和 V_1 的每一个顶点.

充分性得证.

定理 4.1.2 告诉了我们这样一个事实：

设有 n 个人，m 项工作任务.问能否适当地安排任务，使得每个人都有工作做？显然当 $m<n$ 时，答案是否定的(这里我们假定每

一项工作只能由一个人来干). 即使当 $m \geqslant n$ 时,题目的要求也不一定能够办到. 但是,定理 4.1.2 证明了如下的结论:在 $m \geqslant n$ 的前提下,当这 n 个人适应工作的能力越强时,越容易做到使每一个人都有工作做.

例 4.1.4 如图4.1.6所示,求图中的匹配,使该匹配 M 关于 $V_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 饱和.

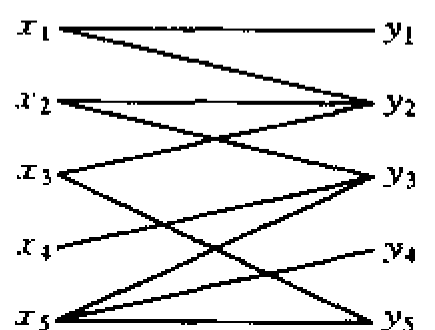


图 4.1.6

第一步:先给出初始匹配 $M=\{(x_1,y_1),(x_3,y_5),(x_5,y_3)\}$. 如图 4.1.7 所示. 其中属于匹配 M 的边用实线表示,而不属于 M 的边用虚线表示.

第二步:因为 V_1 尚未饱和,故可找出其中的一个未饱和点 x_2. 从顶点 x_2 出发,寻找一条终点在 $V_2=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ 中的交互道:$P=x_2y_3x_5y_5x_3y_2$.

显然 P 是一条可增广道路,故可作:

$$M_1=M\oplus E(P)=(M\cup E(P))\setminus(M\cap E(P))=$$
$$(\{(x_1,y_1),(x_3,y_5),(x_5,y_3)\}\cup\{(x_2,y_3),(y_3,x_5),$$
$$(x_5,y_5),(y_5,x_3),(x_3,y_2)\}\setminus\{(x_3,y_5),(x_5,y_3)\}=$$
$$\{(x_1,y_1),(x_2,y_3),(x_5,y_5),(x_3,y_2)\}.$$

所得新匹配 M_1,如图 4.1.8 所示.

第三步:V_1 仍未饱和,且其中 x_4 为非饱和点,故又可从顶点 x_4 出发,寻找一条终点在 V_2 中的交互道:$P_1=x_4y_3x_2y_2x_3y_5x_5y_4$.

显然 P_1 仍是一条可增广道路,故可作:

$$M_2 = M_1 \oplus E(P_1) =$$

$$(\{(x_1,y_1),(x_2,y_3),(x_5,y_5),(x_3,y_2)\} \cup \{(x_4,y_3),$$
$$(y_3,x_2),(x_2,y_2),(y_2,x_3),(x_3,y_5),(y_5,x_5),$$
$$(x_5,y_4)\} \setminus \{(x_2,y_3),(x_5,y_5),(x_3,y_2)\} =$$
$$\{(x_1,y_1),(x_4,y_3),(x_2,y_2),(x_3,y_5),(x_5,y_4)\}.$$

又得到一个新的匹配 M_2，如图 4.1.9 所示.

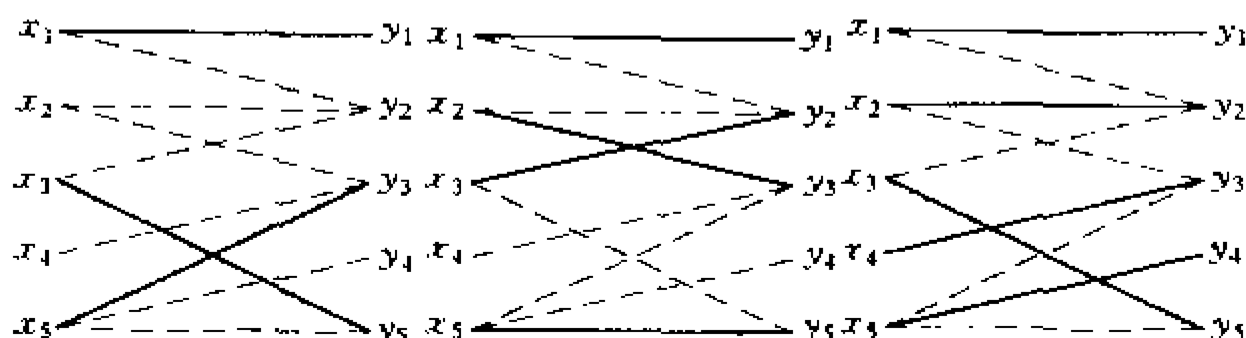


图 4.1.7　　　　图 4.1.8　　　　图 4.1.9

第四步：因 V_1 已全部饱和，故结束.

定义 4.1.7　设 K 是图 $G=(V,E)$ 中顶点集 V 的一个子集，如果 G 的每条边至少都有一个端点在 K 中，则称 K 是 G 的一个覆盖.

如果 G 中没有适合 $|K'|<|K|$ 的覆盖 K'，则称 K 是图 G 的最小覆盖.

如图 4.1.10 所示，分别给出了一个图的覆盖和最小覆盖. 其中点集 $\{v_1,v_2,v_4,v_5\}$ 是一个覆盖，而点集 $\{v_2,v_3,v_4\}$ 是一个最小覆盖.

若 K 是图 G 的一个覆盖，M 是 G 的一个匹配，则 K 至少含有 M 中每条边的一个端点. 于是，对于任何匹配 M 和任何覆盖 K，恒有 $|M|\leqslant|K|$.

事实上，设 M^* 是图 G 的一个最大匹配，$\widetilde{K}$ 是图 G 的一个最小覆盖，也必有：$|M^*|\leqslant|\widetilde{K}|$.

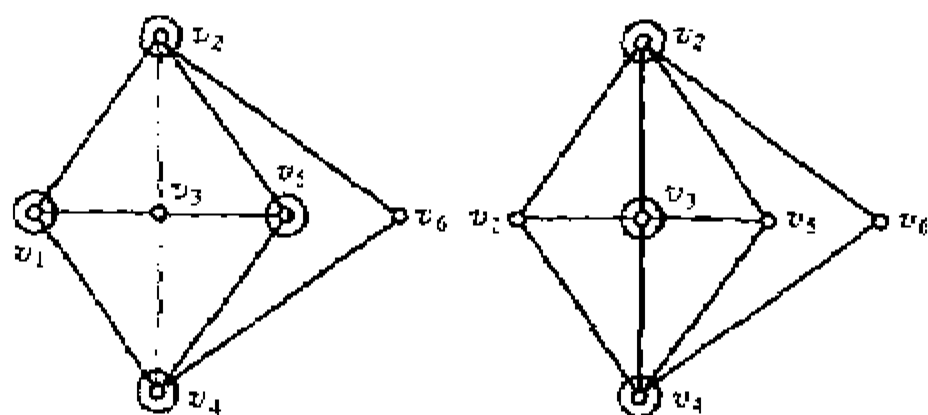


图 4.1.10

定理 4.1.3 设 M 是图 G 的一个匹配，K 是图 G 的一个覆盖. 若它们之间满足关系式 $|M|=|K|$. 则 M 必定是最大匹配，K 必定是最小覆盖.

证明 设 M^* 是图 G 的最大匹配，$\widetilde{K}$ 是图 G 的最小覆盖. 则有 $|M|\leqslant|M^*|$，$|K|\geqslant|\widetilde{K}|$.

但由前面讨论，知：$|M^*|\leqslant|\widetilde{K}|$，又由题设，$|M|=|K|$. 这表明：$|M|=|M^*|$，$|K|=|\widetilde{K}|$. 即 M 为最大匹配，K 为最小覆盖.

定理 4.1.4 在二部图 $G=(V_1,V_2,E)$ 中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数.

证明 略.

定义 4.1.8 如果一个图 G 的每一个顶点都具有相同的度，则称这个图是正则的.

特别，对于每个顶点的度均为 k 的正则图，称为 k－正则图.

为方便起见，度为零的顶点称为孤立点. 度为 1 的顶点称为悬挂点.

定义 4.1.9 设 M 是图 G 的一个匹配，如果 G 的每一个顶点是 M 饱和的，则称 M 是完美匹配.

例 4.1.5 如图4.1.11所示的图 G 中：

$M=\{(v_1,v_2),(v_3,v_4),(v_5,v_6),(v_7,v_8)\}$ 就是一个完美匹配.

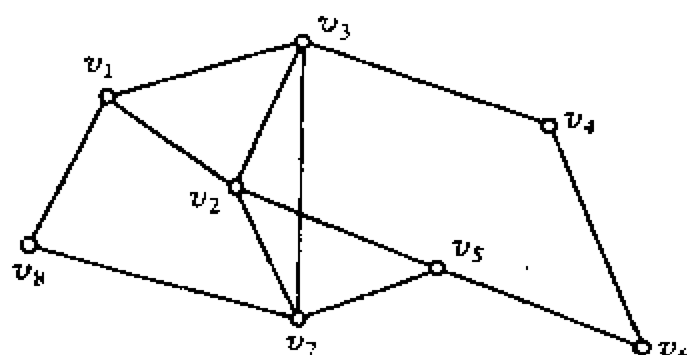


图 4.1.11

定理 4.1.5 若 G 是一个 k - 正则二部图($k>0$),则图 G 有一个完美匹配.

证明 设 $G=(V_1,V_2,E)$是一个二部图.

由于 G 是 k - 正则的,故有:$k\cdot|V_1|=|E|=k\cdot|V_2|$.

且由题设,$k>0$,所以必:$|V_1|=|V_2|$.

设 A 是 V_1 的任一子集,E_1,E_2 分别表示与 A 和 $N_G(A)$中顶点关联的边集.则根据 $N_G(A)$的定义,知必有 $E_1\subseteq E_2$,于是有

$$k\cdot|N_G(A)|=|E_2|\geqslant|E_1|=k\cdot|A|.$$

这表明$|N_G(A)|\geqslant|A|$.

再由定理 4.1.2,知必有一个对于 V_1 的每个顶点都饱和的匹配 M,又由于$|V_1|=|V_2|$,故知匹配 M 是一个完美匹配.

如果一个图的某个分支有奇数个顶点,则称此分支为奇分支;如果某一分支有偶数个顶点,则称此分支为偶分支.用 $O(G)$来表示图 G 的奇分支的数目,则有下面的定理:

定理 4.1.6 图 G 有完美匹配的充要条件是:

$O(G-A)\leqslant|A|$,对所有的 $A\subset V$ 成立.

其中 V 表示图G 的顶点集合.

此定理的证明较长,限于篇幅,我们这里从略.

定理 4.1.7 每个没有割边的3 - 正则图都有完美匹配.

证明 设图 G 是一个没有割边的 3 - 正则图.

再设 A 是 G 的顶点集 V 的一个真子集. 用 $G_1, G_2, \cdots, G_r$ 来表示 $G-A$ 的奇分支, 又设数 m_i 是一个端点在 $G_i(i=1,2,\cdots,r)$ 中, 另一个端点在 A 中的边的数目.

由于图 G 是 3－正则的; 故

$$\sum_{v \in V(G_i)} d(v)=3|V(G_i)|, i=1,2,\cdots,r, \sum_{v \in A} d(v)=3|A|,$$

其中 $|V(G_i)|$ 表示 G_i 中的顶点数目.

从而知: $\sum_{v \in V(G_i)} d(v)-2|E(G_i)|=m_i$ 为奇数.

这里, $|E(G_i)|$ 表示 G_i 中的边的数目.

又由于 G 没有割边, 所以 $m_i \neq 1$. 这表明, 上式对 $1 \leqslant i \leqslant r$, $m_i \geqslant 3$ 成立, 于是有:

$$O(G-A)=r \leqslant \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{r} m_i \leqslant \frac{1}{3} \sum_{v \in A} d(v)=|A|.$$

从而由定理 4.1.6 知图 G 有完美匹配.

§4.2 色数

设图 $G=(V,E)$, 且 $|V|=n$, $|E|=m$.

我们主要讨论对图 G 的顶点着色和边着色这样两类问题. 对图 G 的所有顶点着色时, 要求所相邻的两顶点所着的颜色不一样, 问最少需要用几种颜色? 这就是所谓"顶点着色"问题. 若对图 G 的所有边进行着色, 即要求与同一顶点相关联的边有不同的着色, 问最少需要用几种颜色? 这就是所谓"边着色"问题.

前面, 我们曾经提到过图的着色问题, 但只是就平面图讨论了四色、五色问题, 本节将讨论一般的着色问题.

我们先来看几个实际问题.

一、课程考试安排问题

设某一学校有 n 门课程可供学生选修, 期末要进行考试. 显然, 每个学生每场只能参加一门课程的考试. 问题是: 期末考试最少要安

排多少场？

根据考试的要求，同一个学生所选修的两门课程的考试不能安排在同一时间．当然，没有相同的学生的不同课程是可以安排在同一时间进行考试的．

对此，我们可建立如下的数学模型：

在平面上分别取定 n 个点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 来表示这 n 门课程，若有某同学同时选修了课程 a 与课程 b，则在顶点 v_a 与 v_b 之间连一条边．这样，就得到了一个有 n 个顶点的图 G．

于是，课程考试安排问题即可归结为对图 G 的顶点着色问题．即着同一颜色的顶点所对应的课程可安排在同一时间进行考试．这样，求出使图 G 的相邻顶点着不同颜色的最少数目，便是所应安排考试的最少场数．

二、物资储存问题

设有 n 种物资需要存放在仓库中．但有些物资决不允许放在同一个房间里，否则将会使物资损坏，甚至会发生危险．问题即为：存放这 n 种物资，最少需要准备多少个房间？

与问题一相似，可建立模型如下：

在平面上取定 n 个顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 分别表示这 n 种物资．若 a 与 b 是不能放在一起的两种物资，则在 v_a 与 v_b 之间连一条线．这样，又可得到一个 n 阶图 G，且此问题又归结为对图 G 的顶点着色的问题．

三、时间表问题

设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为 m 个工作人员，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 为 n 种设备．又设工作人员 x_i 对设备 y_j 提出要求，使用时间假定均以单位时间来计算．显然，每一个工作人员在同一个时间里只能使用一种设备，且某一种设备在同一时间里只能供一个工作人员使用．问题是：应如何合理安排，才能使得在尽可能短的时间里满足每一个工作人员的要求？

与前面所讲的匹配问题类似，此问题可转化为关于顶点集 $V_1=$

$\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$，与顶点集 $V_2=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 的二部图 $G=(V_1, V_2, E)$ 的边着色问题.这里边集 E 是由如下方法得出的：若工作人员 x_i 需要使用设备 y_j，则在 x_i 与 y_j 之间连一条边（且每单位时间对应一条边，显然，此时图 G 中过 x_i, y_j 的边可能不只一条）.于是，我们可以对二部图 $G=(V_1, V_2, E)$ 进行边着色，使得具有相同颜色的边可安排在同一单位时间里.

上面虽然提出了顶点着色与边着色这样两类问题，但实际上边的着色问题是可以很容易地转化为顶点着色问题的.

例 4.2.1 对图4.2.1所示的图的边（实线所表示的边）进行边着色，要求与同一顶点相关联的边有不同的颜色.

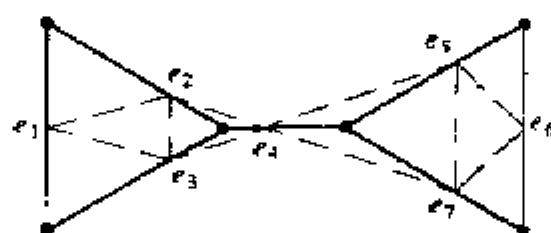


图 4.2.1

为了使边着色转化为顶点着色，对应于图 4.2.1 中的图，作一图使其满足下列条件：

(1) 对于图 4.2.1 中的每一条边 e_i，在 e_i 上取定一个顶点（记为 u_i）；

(2) 当且仅当图 4.2.1 中的两条边 e_i 与 e_j 之间有一公共顶点时，在(1)中所确定的 v_i 与 v_j 之间连一条边（见图 4.2.1 中的虚线）.

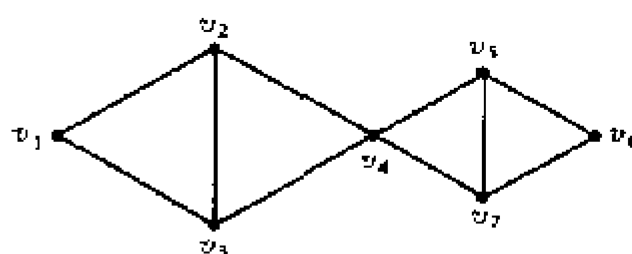


图 4.2.2

图 4.2.2 即为满足(1),(2)的图.

这样,我们就把图 4.2.1 的边着色问题,转化成了对图 4.2.2 的顶点着色问题.

下面具体讨论着色问题.

定义 4.2.1 给定图 $G=(V,E)$,且 $S\subseteq V$.

若 S 中任意两个顶点在 G 中均不邻接,则称 S 是一个独立集.

例 4.2.2 在图4.2.3所示的图中:

$S_1=\{v_2,v_4\}$,

$S_2=\{v_2,v_4,v_6\}$,

$S_3=\{v_2,v_6\}$均为独立集.

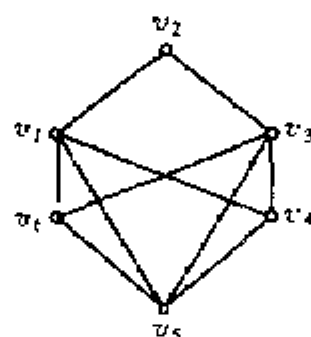


图 4.2.3

定义 4.2.2 用 s 种颜色对图 G 的顶点进行着色,且没有相异的邻接点有相同的颜色,则称此着色方法为图 G 的一个 s - 顶点着色.

s - 顶点着色也简称为 s - 着色.

定义 4.2.3 使图 G 为 s - 着色的数 s 的最小值,称为图 G 的色数,并将 G 的色数记作 $\chi(G)$.

若 $\chi(G)=s$,则称图 G 是 s - 色的.

例 4.2.3 图4.2.4给出了一个 3 - 着色图 G.

若分别用 c_1,c_2,c_3 来代表三种不同的颜色,则图中给出了具体的着色方法.

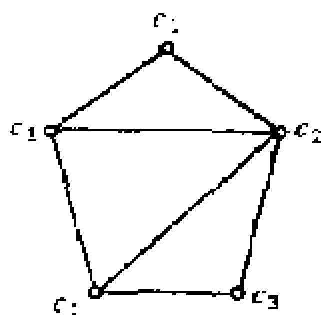


图 4.2.4

显然,图 4.2.4 也是 3 - 色的,也就是说,该图的色数为 3,亦即

$\chi(G)=3$.

显然，图 G 的顶点着色以后，具有任何一种相同颜色的所有顶点的集合是彼此独立的。因此，图的一个 s－着色是把图 G 的顶点集 V 分解成 s 个(可能有空集)独立集的一个分划 $V=(V_1,V_2,\cdots,V_s)$。据此，下面的定理是显然的。

定理 4.2.1 图 G 是 2－着色的，当且仅当图 G 是二部图。

定理 4.2.2 对于任意一个图 G，恒有：$\chi(G)\leqslant\triangle+1$。其中，$\triangle$ 为图 G 中顶点的最大度数。

证明 设图 $G=(V,E)$，且 $|V|=n$，$|E|=m$。

下面对顶点个数 s 作归纳法。

显然，当 $s=1$ 时，有：$\triangle=0$，$\chi(G)=1$，故此时定理成立。

假设定理对图 G 的顶点个数 $s\leqslant n-1$ 时成立。

$s=n$ 时，设 v 是图 G 的任一顶点，由归纳假设有 $\chi(G-v)\leqslant\triangle_1+1$，其中 $\triangle_1$ 为 $G-v$ 中顶点的最大度数。

显然 $\triangle_1\leqslant\triangle$，于是有：$\chi(G-v)\leqslant\triangle-1$。

从而可用 $\triangle+1$ 种颜色对 $G-v$ 的顶点着色。再设与 v 邻接的顶点是 $u_1,u_2,\cdots,u_k$，用 $c_1,c_2,\cdots,c_k$ 表示对顶点 $u_1,u_2,\cdots,u_k$ 所着的颜色。则由 $k\leqslant\triangle$，故从 $\triangle+1$ 种颜色中必然可以找到一种颜色 $c_{k+1}(c_{k+1}\neq c_j,j=1,2,\cdots,k)$。于是可对顶点 v 着色 c_{k+1}。

归纳法完成。

关于色数 $\chi(G)$，我们还可给出如下几个简单的结论：

(1) 图 G 只有孤立点时，$\chi(G)=1$；

(2) 对于 n 阶完全图 K_n，有：$\chi(G)=n$；

(3) 若图 G 是由 n 个顶点所构成的一个回路时，有

$$\chi(G)=\begin{cases}2, & n\text{ 为偶数}\\ 3, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

(4) 若图 G 是顶点数超过 1 的一棵树时，必有 $\chi(G)=2$。

定义 4.2.4 设图 $G=(V,E)$。H 是图 G 的任一子图，且 $H=(V_1,E_1)$。若满足：只要 V_1 是 V 的真子集，就有 $\chi(H)<\chi(G)$，则

称图 G 是临界的.

若图 G 是 s − 色的,又是临界的,则称图 G 是 s − 邻界的.

例 4.2.4 对于完全图 K_n 来说,它即是临界的,又是 n − 邻界的.

定义 4.2.5 设图 $G=(V,E)$.图 G 的顶点的最小度数 δ 规定为:$\delta=\min\{d(v)\mid v\in V\}$.

下面给出重要的定理.

定理 4.2.3 若图 G 是 s − 邻界的,则 $\delta\geqslant s-1$.

证明 用反证法.

若图 G 是 s − 邻界的,且 $\delta<s-1$,可假定对于顶点 v,$d(v)=\delta$.

由于 G 是 s − 邻界的,所以 $G-v$ 是 $(s-1)$ − 着色的.于是可设 $(V_1,V_2,\cdots,V_{s-1})$ 是 $G-v$ 的一个 $(s-1)$ 着色.而 $d(v)=\delta$,v 在图 G 中与 δ 个顶点相邻接.注意到 $\delta<s-1$,知顶点 v 必然在图 G 中与某个顶点集 V_j 的所有顶点都不邻接.由此得:

$(V_1,V_2,\cdots,V_j\cup\{v\},V_{j+1},\cdots,V_{s-1})$ 是 G 的一个 $(s-1)$ − 着色.这与假设:$\delta<s-1$ 矛盾.

定理 4.2.4 设图 G 是一个 s − 色图,则 G 中至少有 s 个顶点的度数不小于 $s-1$.

证明 设图 G 是一个 s − 色图,且 H 是 G 的一个 s − 临界子图.

由定理 4.2.3 知,H 的每个顶点在 H 中的度数不小于 $s-1$.显然,这些顶点在 G 中的度数也不会小于 $s-1$.又由于 H 是 s − 色的,故 H 中至少有 s 个顶点,这即证明了图 G 中至少有 s 个顶点的度数不小于 $s-1$.

定义 4.2.6 设 u,v 是某个图 G 中的两个不邻接的顶点,我们用符号 $G:uv$ 表示把 u,v 收缩为一个顶点 x,$x=u$ 或 $x=v$,并把 G 中凡是与 u,v 相关联的边均使之与顶点 x 相关联.这种方法,称之为对图 G 的不相邻顶点的"收缩".用符号 $G+uv$ 表示在 G 中添

加边 uv，称之为对 G 的不相邻顶点的"加边".

例 4.2.5 图4.2.5所示的图中，分别给出了图 G 及 $G:v_1v_3$ 的图形.

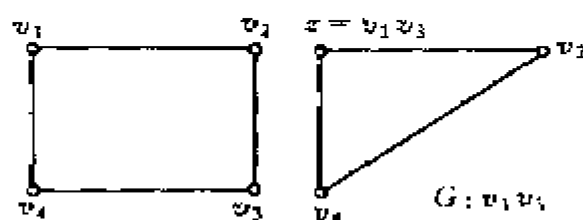


图 4.2.5

定理 4.2.5 设 u,v 是图 G 的两个不邻接的顶点，则:

$$\chi(G)=\min\{\chi(G+uv),\chi(G:uv)\}.$$

证明 设 $\chi(G)=k$. 对图 G 的所有顶点着色，对于 G 中两个不邻接的两个顶点 u 和 v 来说，或者 u 与 v 着相同的颜色，或着 u 与 v 着不同的颜色.

(1) 若 u 与 v 着相同的颜色

显然，此时 $k=\chi(G)$ 种颜色足以使得图 $G:uv$ 的相邻顶点着不同的颜色，即有 $\chi(G)\geqslant\chi(G:uv)$.

(2) 若 u 与 v 着不同的颜色

此时 $k=\chi(G)$ 种颜色可使得图 $G+uv$ 的相邻顶点着不同的颜色，从而此时有 $\chi(G)\geqslant\chi(G+uv)$.

综合上述(1)，(2)，即得到

$$\chi(G)\geqslant\min\{\chi(G+uv),\chi(G:uv)\}. \qquad (4.2.1)$$

另一方面，注意到 u,v 不邻接，显然又有

$$\chi(G)\leqslant\chi(G+uv),\chi(G)\leqslant\chi(G:uv)\}.$$

这样，我们又可得到

$$\chi(G)\leqslant\min\{\chi(G+uv),\chi(G:uv)\}. \qquad (4.2.2)$$

最后，由(4.2.1)(4.2.2)两式，即得

$$\chi(G)=\min\{\chi(G+uv),\chi(G:uv)\}.$$

定理 4.2.5 给出了求给定图 G 的色数的一种有效的方法.

设 u,v 是图G 中任意两个不相邻的顶点.

若图 G 的着色给出了 u 与 v 具有相同的颜色，则可确定图 $G\cdot uv$的一个着色；

若图 G 的着色给出了 u 与 v 具有不同的颜色，则可确定图 $G+uv$的一个着色；

将上述两种过程重复进行(即不断收缩与加边)，直到所得的图为一个最小的完全图为止.若所得到的完全图是 K_r，则 $\chi(G)=r$.

下面再看一个具体的例子.

例 4.2.6 对于图4.2.6所示的图 G，经过连续的收缩和加边，最后得到完全图 K_3.这表明，图 G 是3－着色的.

注 所得到的图并不只一个，我们要求最后所得到的图必须都是完全图，且最后取最小的完全图 K_r.例 4.2.6 中，最后得到的最小完全图为 K_3，故该图 G 是3－色的.

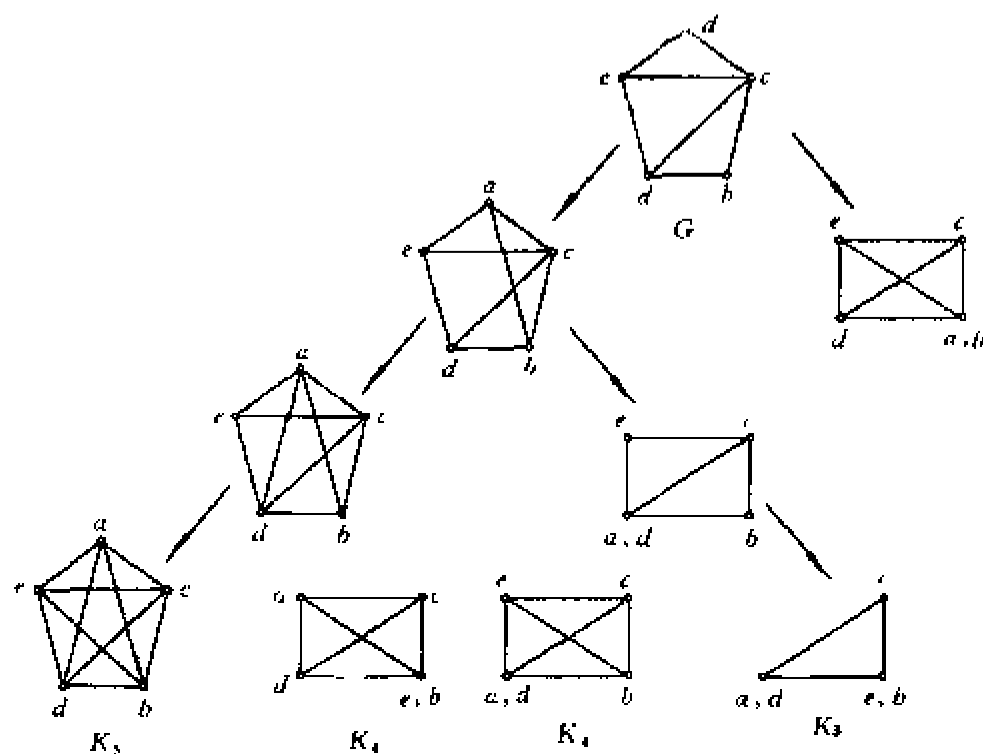


图 4.2.6

例 4.2.6 中的图 G 可用红、黄、蓝三种颜色着色，如图 4.2.7.

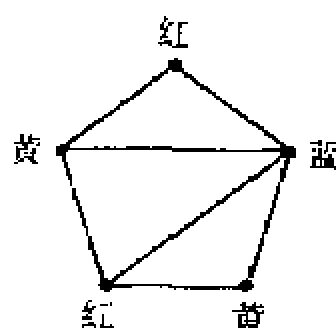


图 4.2.7

§4.3 独立集与色多项式

例 4.3.1 上节对图 $G=(V,E)$ 的顶点进行着色的结果，即把 V 分成了若干个独立集，对此我们再进行进一步的讨论.

定义 4.3.1 设图 G 的某一顶点的集合是独立集，但是任意增加一个顶点就破坏它的独立性，则称这样的独立集为极大的独立集.

我们将图 G 中顶点数最多的极大独立集中的顶点数目，表示为 $\beta(G)$.

例 4.3.2 图4.3.1所示的图 G 中：

$\{v_1,v_3\}$，$\{v_2,v_4\}$，$\{v_5,v_7\}$，$\{v_1,v_8,v_3\}$，$\{v_1,v_8,v_3,v_6\}$ 均为独立集. 且 $\{v_1,v_8,v_3,v_6\}$ 为一个极大独立集，故 $\beta(G)=4$.

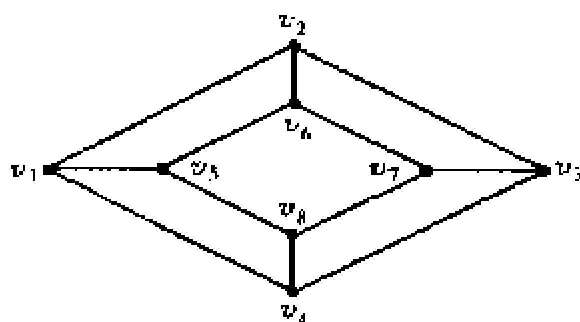


图 4.3.1

前面介绍了极大独立集的概念，从定义可以看出：找一个极大独

立集并不困难，只要从任意一顶点开始，然后每次增加一点，并保证所增加的点与已有的顶点均不相邻.这样的步骤反复进行，直到最后不能增加为止，便得到一个极大独立集.

例 4.3.3 如图4.3.2，

取顶点 v_1，可得到极大独立集为：$\{v_1, v_5\}$或$\{v_1, v_6\}$；

取顶点 v_2，可得到极大独立集为：$\{v_2, v_3, v_5\}$或$\{v_2, v_3, v_6\}$；

取顶点 v_3，可得到极大独立集为：$\{v_3, v_2, v_5\}$或$\{v_3, v_2, v_6\}$；

取顶点 v_4，可得到极大独立集为：$\{v_4\}$，为单点集.

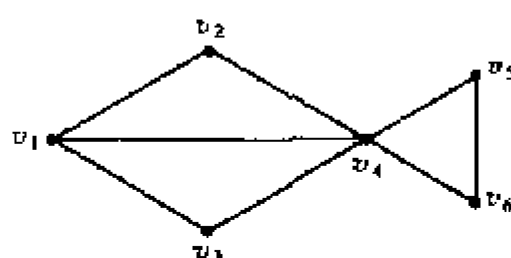


图 4.3.2

对顶点 v_5, v_6 也可如上讨论.

最后，得到全部极大独立集为：$\{v_2, v_3, v_5\}$，$\{v_2, v_3, v_6\}$，$\{v_1, v_5\}$，$\{v_1, v_5\}$，$\{v_4\}$，$\{v_5, v_2\}$，$\{v_6, v_3\}$，$\{v_5, v_3\}$，$\{v_5, v_2\}$.

独立集与覆盖之间有着密切的关系.

定理 4.3.1 设图 $G=(V,E)$，且 $S\subseteq V$. 则 S 是 G 的独立集当且仅当 $\bar{S}=V\setminus S$ 是 G 的一个覆盖.

证明 根据独立集的定义知，S 是 G 的独立集当且仅当没有 G 中的边，其两个端点均在 S 中.这就表明 S 是 G 的独立集当且仅当 G 的每一条边至少有一个端点在 $\bar{S}=V\setminus S$ 中，从而 $\bar{S}$ 是 G 一个覆盖.

最后，我们给出色多项式的概念.

我们知道，图 G 的色数是对图 G 的顶点进行着色所需要的最少的颜色的数目.如果所给的颜色的数目比色数大，自然可以对图 G 的顶点进行着色，而且着色的方法不止一种.

定义 4.3.2 图 G 的一个用λ 种或不到λ 种颜色的着色，叫做图 G 的一个至多λ - 色的着色.

在图 G 的两个至多λ - 色的着色中，如果 G 的所有顶点中至少有一个顶点被着以不同的颜色，则认为这两个至多 λ - 色的着色是不相同的.

定义 4.3.3 图 G 的不同的至多λ - 色的着色的数目，称为图 G 的色多项式，记作 $P(\lambda)$.

显然，若 $\lambda<\chi(G)$，则 $P(\lambda)=0$，而 $P(\lambda)>0$ 的最小的 λ 是图 G 的色数$\chi(G)$.

设 m_i 是用i 种颜色对图 G 的顶点进行着色的不同方案数. 现用 $\lambda(\lambda\geqslant i)$种颜色对图 G 进行着色，每取 i 种颜色时有$m_i\cdot C_\lambda^i$ 种不同的方案，于是我们有

$$P(\lambda)=m_1\cdot C_\lambda^1+m_2\cdot C_\lambda^2+\cdots+m_n\cdot C_\lambda^n,$$

其中 n 为图G 的顶点数，C_λ^i 为从λ 个物品中取i 个物品的组合数，即

$$P(\lambda)=m_1\cdot\lambda+\frac{m_2}{2!}\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)+\frac{m_3}{3!}\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)+\cdots+\frac{m_n}{n!}\cdot\lambda\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1).$$

由上式可知，图 G 的不同的至多λ - 色的着色的数目 $P(\lambda)$是 λ 的一个多项式.

例 4.3.4 三阶完全图 K_3，有：$P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$.

事实上，对 K_3 的任何一个指定的顶点，可以用 λ 种颜色中的任何一种颜色进行着色；而对 K_3 的第二个顶点，可以用 $\lambda-1$ 种颜色中的任何一种进行着色；第三个顶点则可用 $\lambda-2$ 种颜色中的任何一种颜色.

一般地，对于 n 阶完全图K_n，有

$$P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1).$$

我们再来看一个色数问题的具体应用.

例 4.3.5 如图4.3.3是一电路图.

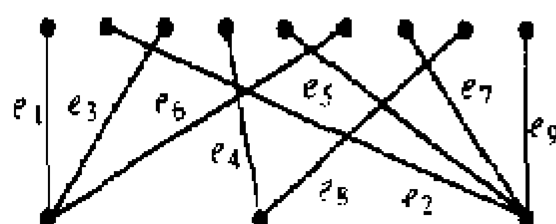


图 4.3.3

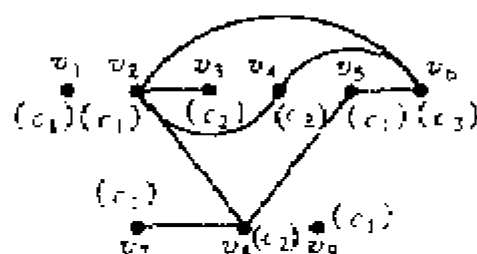


图 4.3.4

如要设计一印刷电路板.印刷电路板是在绝缘板内嵌入导线,故在同一板内不允许两根导线在接点以外的地方交叉.问最少要分成几层印刷电路板?

图 4.3.3 中的边 $e_1,e_2,\cdots,e_9$ 分别对应于顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_9$. 当 e_i 与 e_j 两条边在接点以外交叉时,则过 v_i, v_j 引一条边(见图 4.3.4).

图 4.3.4 的色数为 3. 故可用三种颜色,比如:c_1,c_2,c_3 对该图的顶点进行着色(如图中括号中所示).

由于 v_1,v_2,v_5,v_7,v_9 着同一颜色 c_1,而 v_3,v_4,v_8 着同一颜色 c_2,顶点 v_6 着色 c_3. 故 e_1,e_2,e_5,e_7,e_9 在同一层印刷电路板上,如图 4.3.5(a)所示. 且 e_3,e_4,e_8 在另一层印刷电路板上,如图 4.3.5(b)所示. 同样,e_6 在第三层印刷电路板上,如图 4.3.5(c)所示.

三层印刷电路板组成电路如图 4.3.6 所示.

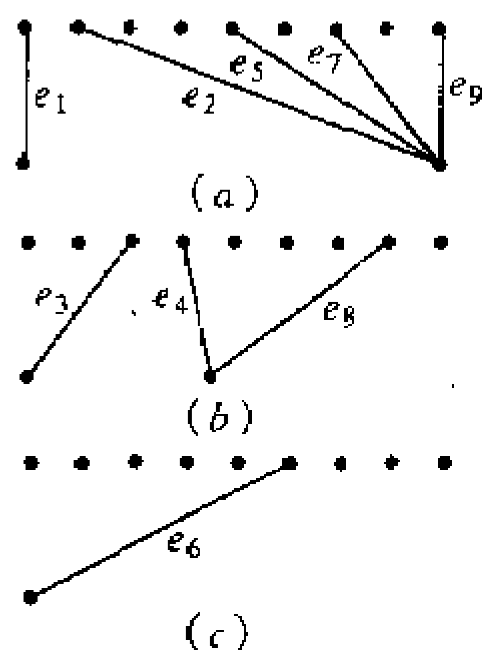


图 4.3.5

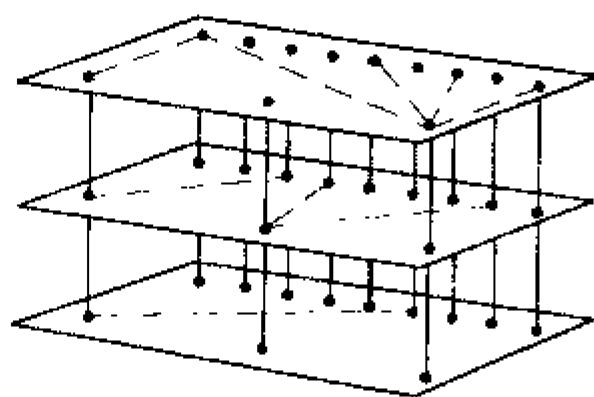


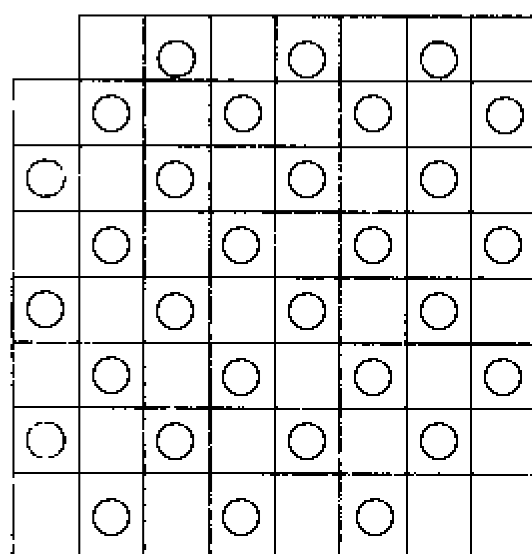
图 4.3.6

习题四

1. 证明：树至多有一个完美匹配.

2. 证明：一个 8×8 正方形删去 2 个位于对角上的 1×1 的小正方形后，不能用 1×2 的小长方形遮盖住.

提示：如题图 4.1 所示，构成一个分别为□和○的图.



题图 4.1

3. 设图 G 的色数为 $k=\chi(G)$. 证明图 G 至少有 C_k^2 条边.

4. 试求题图 4.2 的所有的极大独立集.

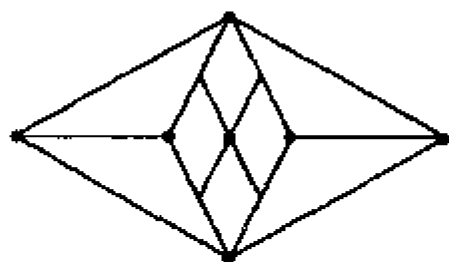


图 4.2

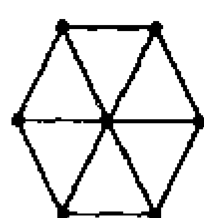
5. 试证 n 个顶点的树的色多项式为：

$$P(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^{n-1}.$$

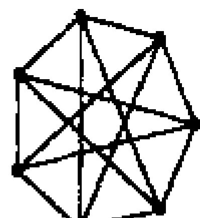
6. 设由 a,b,c,d,e,f 6 个人组成一个小组检查 5 个单位的工作. 若某单位和 x,y 2 人有过工作联系，则用 $\{x,y\}$ 来表示. 已知与这 5 个单位有过工作联系的人分别为：$\{b,c,d\}$，$\{a,e,f\}$，$\{a,b,e,f\}$，$\{a,b,d,f\}$，$\{a,b,c\}$. 今要求到某单位去检查工作的人必须是和该单位没有联系的人. 问应如何安排才能达到要求(每个单位去 2 个人).

7. 求题图 4.3(a)，(b)的色数，并对其进行着色.

8. 对题图 4.4 进行着色.

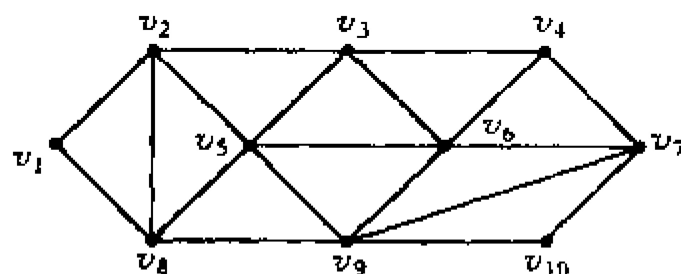


(a)



(b)

题图 4.3



题图 4.4

9. 出席某次国际学术会议的 6 个成员：a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6，他们的情况是：a_1 会讲汉语、法语和日语；a_2 会讲德语、日语和俄语；a_3 会讲英语和法语；a_4 会讲汉语和西班牙语；a_5 会讲英语和德语；a_6 会讲俄语和西班牙语. 现欲将此 6 人分为两个组，问是否能发生同一组内任 2 个人不能互相交谈的情形？

10. 有 4 名教师：张、王、李、赵. 现欲安排他们讲授 4 门课程：数学、物理、电工和计算机. 但张只会讲物理和电工；王只会讲数学和计算机；李会讲物理、数学和电工；赵只会讲电工. 问应如何进行安排，才不会使任何人去讲授他所不会讲的学科？

第五章　路径问题

§5.1　最短道路

定义 5.1.1　设图 $G=(V,E)$. 若对于图 G 的每一条边 (v_i, v_j),相应地确定一个数 $l(v_i,v_j)$(简记作 l_{ij}),称 l_{ij} 为边 (v_i,v_j) 的"权". G 连同它各边上的权称为赋权图.

若用 W 表示 G 的所有边上的权的集合,我们可将赋权图 $G=(V,E)$,记作 $G=(V,E,W)$.

又设 H 是赋权图 G 的一个子图,H 中每一条边的权之和也称为子图 H 的权,记作 $l(H)$.

为了叙述方便,赋权图 G 中一条边的权也称为该边的长. 于是,对于赋权图 G 中的一条道路:$\mu=v_1v_2v_3\cdots v_{k-1}v_k$ 的长,是指道路 μ 上所有边的长之和,即

$$l(\mu)=\sum_{i=1}^{k-1} l(v_i,v_{i+1})=\sum_{i=1}^{k-1} l_{i,i+1}.$$

定义 5.1.2　在赋权图中给定一个顶点 v_i(称之为始点),及另一个顶点 v_j(称之为终点). 在所有以 v_i 为始点,以 v_j 为终点的道路集合 $\{P_{ij}\}$ 中,长最小的道路,称为从 v_i 到 v_j 的最短道路. 并且将从 v_i 到 v_j 的最短道路的长记作:$d(v_i,v_j)$. 注意:这里 $d(v_i,v_j)$ 表示从 v_i 到 v_j 的最短道路的长,而 $l(v_i,v_j)$ 指的是当 v_i 与 v_j 邻接时,边 (v_i,v_j) 的权.

最短道路问题可以直接应用于生产实际. 例如各种管道的铺设,线路的安排,输送网的最小费用问题等等.

特别需要指出的是，前面所提到的边的长（即权）是具有广泛意义的．比如在输送网络中，从 v_i 点输送一个单位的物质到 v_j 点，若长是指通常意义下的距离，则最短道路就是使运输距离最短的运输路线；若长所表示的意义为时间，则最短道路就是指使运输时间最短的路线．此外，最短道路还可代表最少费用，最小流量等等．

本节具体介绍两类最短道路问题的算法．

为了讨论问题的方便，在以下的讨论中，我们均假定边的长 $l_{ij}\geqslant 0$、如果顶点 v_i 与 v_j 不邻接，则可令 $l_{ij}=\infty$（在实际计算中，也可用任一足够大的数来代替之）．且对图 G 中每个顶点 v_i，约定：$l_{ii}=l(v_i,v_i)=0$．

第一类问题：求一个从给定的始点 v_1 出发，到终点 v_N 的最短道路．

我们给出具体计算方法为：

先给赋权图 $G=(V,E,W)$ 的每一个顶点标记一个数（称为标号）．这里，标号分为两种：一种是临时标号（简称为 T 标号）；一种是固定标号（简称为 P 标号）．其中，T 标号表示从始点到该点的最短道路的上界，而 P 标号则是从始点到该点的最短道路的长．算法过程是每一步把某个点的 T 标号改变为 P 标号．这样，直到终点得到 P 标号，即可停止计算．

一般地，可将计算步骤归结为：

设 $G=(V,E,W)$ 是一个赋权图，计算从某一始点 v_1 到任一顶点 v_N 的最短道路可按如下步骤进行：

(1) 先给始点 v_1 标上 P 标号：$b(v_1)=0$，而给其他各顶点均标上 T 标号：$b(v_j)=l_{1j}$，其中，若 v_s 与 v_1 邻接，则 l_{1s} 即为边 (v_1,v_s) 上的权；而若 v_s 与 v_1 不邻接，则规定 $l_{1s}=\infty$；

(2) 接下来，在所有的 T 标号中取最小者，比如，$b(v_k)=l_{1k}$ 为最小者，则把顶点 v_k 的 T 标号改为 P 标号；

(3) 再重新计算具有 T 标号的其他各顶点的 T 标号，计算方法为：对每一个与顶点 v_k 邻接的顶点 v_s 的 T 标号，选取 $b(v_s)$ 与

$b(v_k)+l_{ks}$两数中的较小者，作为顶点 v_s 新的 T 标号(注意，这里仍然是 T 标号).

继续上面的过程.一般地，设

$P=\{v_j \mid v_j$ 具有 P 标号$\}$，且 $T=\{v_s \mid v_s$ 具有 T 标号$\}$.

则在 $V\setminus P$ 中，令：$b(v_m)=\min\limits_{v_s\in T}\{b(v_s)\}$为点 v_m 的 P 标号，于是有 $v_m\in P$.

再把 $T\setminus\{v_m\}$中顶点 v_j 的 T 标号修改为：

$$\min\{b(v_j),b(v_m)+l_{mj}\};$$

(4) 重复上面的过程，直到 $v_N\in P$ 为止.这时，$b(v_N)$即为从 v_1 到 v_N 的最短道路长.

上面所给出算法的正确性是显然的.

下面我们来算一个具体例子.

例5.1.1 求图5.1.1所示的赋权图 $G=(V,E,W)$中，从顶点 v_1 到顶点 v_{11}的最短道路.

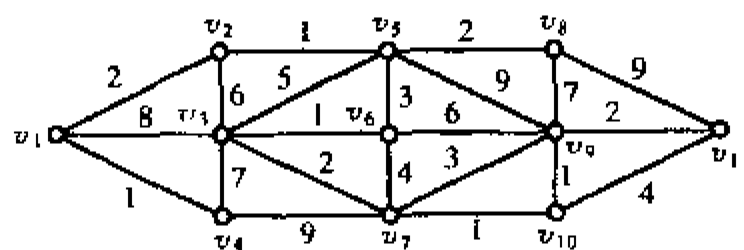


图5.1.1

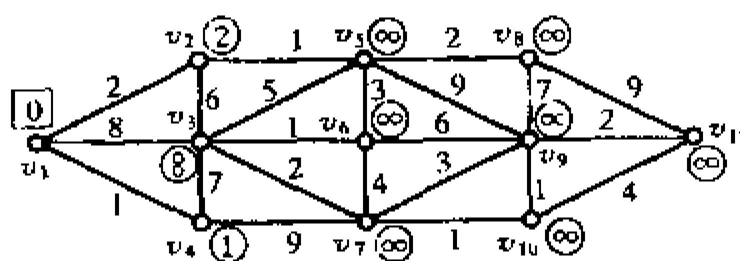


图5.1.2

为了便于检验，我们用方框表示 P 标号，而用圆圈表示 T 标

号.

(1)先给顶点 v_1 标上 P 标号,并用方框将其框起来.而与邻接的各顶点 v_2,v_3,v_4 的 T 标号分别为 2,8,1.其余各顶点的 T 标号均为∞,并将 T 标号均用圆圈将其圆起来.如图 5.1.2 所示.

(2)顶点 v_4 的 T 标号是所有 T 标号中最小的,故把 v_4 的 T 标号改为 P 标号,并且将其用方框框起来.再把与顶点 v_4 邻接的顶点 v_7 的 T 标号改为:$10=\min\{\infty,1+9\}$,而与 v_4 邻接的顶点 v_3 的 T 标号仍然为:$8=\min\{8,1+7\}$,且其余的顶点与 v_4 均不连接,故这些顶点的 T 标号均不改变,如图 5.1.3 所示.

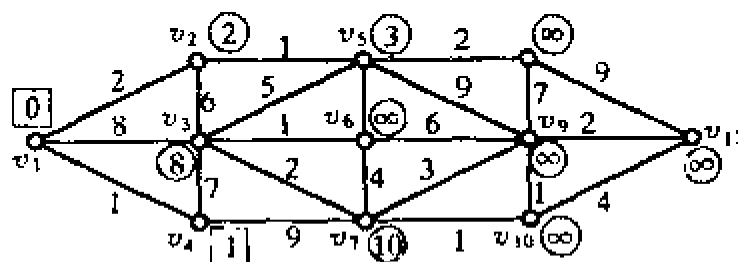


图 5.1.3

(3)接下来,顶点 v_2 的 T 标号是所有 T 标号中最小的,故把顶点的 T 标号 2 改为 P 标号,并将其用方框框起来.再把与 v_2 邻接的顶点 v_5 的 T 标号改为:$3=\min\{\infty,2+1\}$,而与 v_2 邻接的顶点 v_3 及其余顶点的 T 标号均不改变,如图 5.1.4 所示.

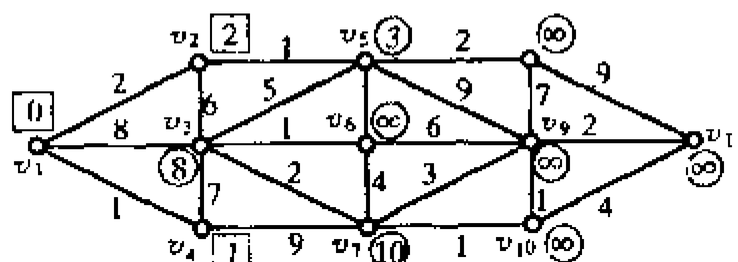


图 5.1.4

(4)把顶点 v_5 的 T 标号改为 P 标号,并将 v_6,v_8 的 T 标号分别改为 6,5.其余顶点的 T 标号不变,如图 5.1.5 所示.

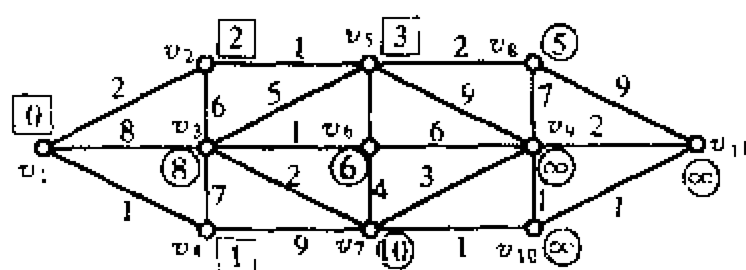


图 5.1.5

(5)把 v_8 的 T 标号改为P 标号,并将 v_{11}的 T 标号改为 14,v_9 的 T 标号改为 12,其余 T 标号不动,如图 5.1.6 所示.

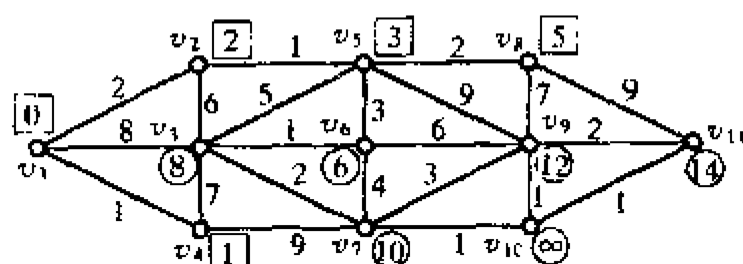


图 5.1.6

(6)把 v_6 的 T 标号改为P 标号,并将 v_3 的 T 标号改为 7,其余 T 标号不动,如图 5.1.7 所示.

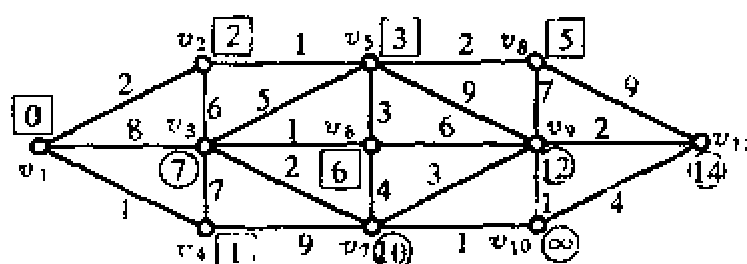


图 5.1.7

(7)把 v_3 的 T 标号改为P 标号,并将 v_7 的 T 标号改为 9,其余 T 标号不动,如图 5.1.8 所示.

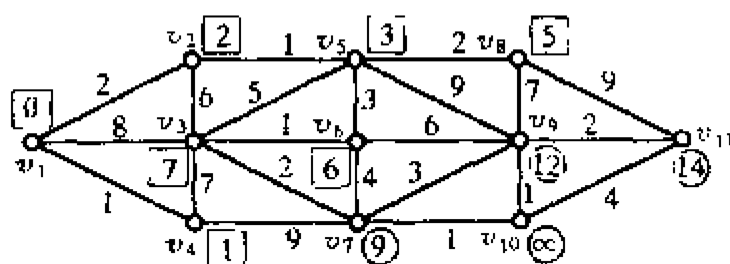


图 5.1.8

(8) 把 v_7 的 T 标号改为 P 标号，并将 v_{10} 的 T 标号改为 10，如图 5. 1. 9 所示. 继续下去可得从顶点 v_1 分别到顶点 v_2，v_3，v_4，v_5，v_6，v_7，v_8，v_9，v_{10}，v_{11} 的最短道路之长为：2，7，1，3，6，9，5，11，10，13. 且图 5.1.10 中的粗实线即给出了由顶点 v_1 到 v_{11} 的最短道路.

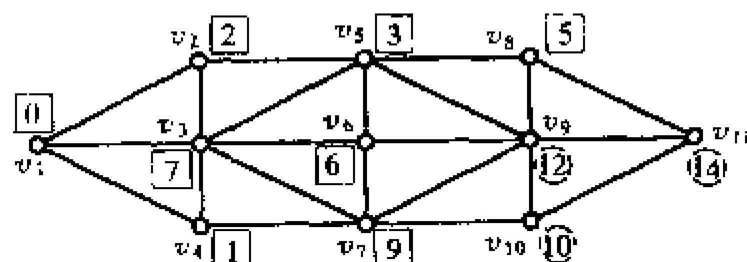


图 5.1.9

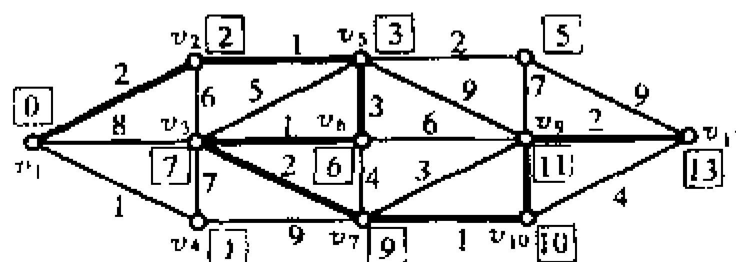


图 5.1.10

第二类问题:设给定 n 阶赋权图 $G=(V,E,W)$,求图 G 中任意给定两个顶点间的最短道路.

首先给出初始 n 阶方阵:$D^{(0)}=(l_{ij})$.

其中,$l_{ij}=l(v_i,v_j)$,表示边(v_i,v_j)的长,若 v_i 与 v_j 不邻接,则

规定 $l_{ij}=\infty$.

接下来,依次构造 n 个 n 阶方阵:$D^{(1)},D^{(2)},\cdots,D^{(n)}$.

其中,第 k 个矩阵:$D^{(k)}=(d_{ij}^{(k)})$的元素 $d_{ij}{}^{(k)}$表示从顶点 v_i 到顶点 v_j 且中间最多只经过 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 这 k 个顶点的某些顶点的所有道路中,最短道路的长.

具体构造 $D^{(k)}$的方法为:

设已知 $D^{(k-1)}=(d_{ij}{}^{(k-1)})$,则可规定矩阵 $D^{(k)}=(d_{ij}{}^{(k)})$中的元素 $d_{ij}{}^{(k)}$为:

$$d_{ij}{}^{(k)}=\min\{d_{ij}{}^{(k-1)},d_{ik}{}^{(k-1)}+d_{kj}{}^{(k-1)}\}.$$

其运算过程从 $k=1$ 开始，分别让 i，j 取遍从 1 到 n 的所有正整数值，从而由 $D^{(0)}$得到 $D^{(1)}$；再取 $k=2$，也分别让 i，j 取遍从 1 到 n 的所有正整数值、得到 $D^{(2)}$；如此继续下去，直到取 $k=n$，由 $D^{(n-1)}$得到 $D^{(n)}$时终止．且此时：$D^{(n)}=(d_{ij}{}^{(n)})$ 中的元素 $d_{ij}{}^{(n)}$即为从任一点 v_i 到 v_j 的最短道路的长.

事实上，在我们的计算过程中，分别计算出了从顶点 v_i 出发，分别经过 v_1，v_2，$\cdots$，v_n 中每一个可能点到达 v_j 的最短道路之长.

下面看一个具体的例子.

例 5.1.2 求图5.1.11所示的图 G 中任意两个顶点之间最短道路的长.

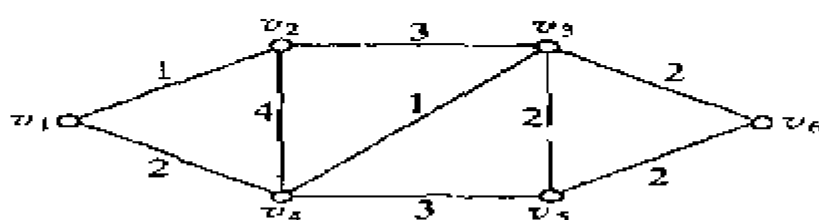


图 5.1.11

先作出 6 阶矩阵 $D^{(0)}$.

$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

再按公式：$d_{ij}^{(1)} = \min\{d_{ij}^{(0)}, d_{i1}^{(0)} + d_{1j}^{(0)}\}$，求出 $D^{(1)} = (d_{ij}^{(1)})$中的每一个元素 $d_{ij}^{(1)}$，得

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 2 & \infty & 8 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

这里只有 $d_{24}^{(1)} = \min\{d_{24}^{(0)}, d_{21}^{(0)} + d_{14}^{(0)}\} = \min\{4, 1+2\} = 3$ 与 $d_{42}^{(1)} = \min\{d_{42}^{(0)}, d_{41}^{(0)} + d_{12}^{(0)}\} = \min\{4, 3\} = 3$. 由 4 变成了 3，其余的元素皆未改变.

接下来，再按公式：$d_{ij}^{(2)} = \min\{d_{ij}^{(1)}, d_{i2}^{(1)} + d_{2j}^{(1)}\}$，得

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 3 & 3 & \infty & \infty \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

这里只有 $d_{13}^{(2)}$ 与 $d_{31}^{(2)}$ 由 ∞ 变成了 4，其余的元素皆未改变.

类似地，由公式：$d_{ij}^{(k+1)} = \min\{d_{ij}^{(k)}, d_{i,k+1}^{(k)} + d_{k-1,j}^{(k)}\}$，可得 $D^{(3)}$，$D^{(4)}$，分别为：

$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 5 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

且 $D^{(4)} = D^{(5)} = D^{(6)} = \cdots$.

这样,我们就求出了图 G 中任意两个顶点 c_i 到 v_j 之间的最短道路长为:$d_{ij}{}^{(6)}$.

例如,顶点 v_1 到 v_6 之间的最短道路长为:$d_{16}{}^{(6)} = 5$;而顶点 v_2 到 v_4 之间的最短道路长为 $d_{24}{}^{(6)} = 3$,等等.

§5.2 中国邮路问题

一个邮递员从邮局出发递送信件,然后再返回邮局.如果要求他必须走过他所管辖范围内的每一条街道至少一次.在这个前提下,问应如何选择递送路线,才能使邮递员走尽可能少的路程?

这个问题是由我国数学家管梅谷教授在1962年首先提出来的,因此一般称之为中国邮路问题.显然,中国邮路问题是一个既与欧拉图有关,又与最短道路有关的问题.事实上,若邮递员所管辖的街道路线构成了一个欧拉回路,则这条欧拉回路便是所求的递送路线.而如果不存在欧拉回路,即存在度数为奇数的顶点,这时,必然有些街道需要经过不只一遍,我们的问题即如何来寻求最短的路线.

我们可以将中国邮路问题用图论的语言来叙述如下：

设图 $G=(V,E,W)$是一个赋权的连通图，且对每一 $e\in E$，都有权 $w(e)>0$. 求从某点 $v\in V$ 出发，经过 G 的每一条边至少一次，而最后返回 v 点的回路C，使得：$W(C)=\sum_{e\in C}w(e)$达到最小.

显然，若图 G 存在一条欧拉回路，则此回路即可作为一条所求的邮路. 于是，我们不妨假定图 G 中不存在欧拉回路，亦即，图 $G=(V,E,W)$中存在度数为奇数的顶点. 又由握手定理可知，度数为奇数的顶点的个数必为偶数个. 从而，可将某些边添加若干次，得到一个新图 G^*，且 G^* 的所有顶点的度数均为偶数，使得图 G^* 成为一个欧拉图. 于是问题可转化为求图 G^* 的一个欧拉回路. 但需注意的是，图 G^* 已不一定是简单图.

设在图 G^* 中，边 e 重复了 k 次，且 $k\geqslant 2$，则可去掉偶数条这样的边，使得去掉这些边后，仍保持各顶点的度数为偶数，即所得到的图仍然是欧拉图. 故为使总权数 $\sum_{e\in C}w(e)$达到最小，不妨假定每条边的重复数目不超过 1.

另外，由邮路问题的实际意义，要使总邮路达到最短，即相当于要求图 G^* 中重复边的长度和达到最小.

例 5.2.1 如图5.2.1所示的图 G 中，只有两个顶点的度数是奇数，且 G 是一个连通的赋权图.

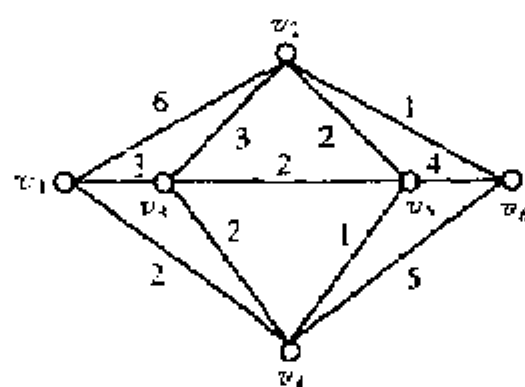


图 5.2.1

显然 G 中存在一条由 v_1 到 v_6 的欧拉道路：

$$P = v_1v_2v_3v_5v_4v_3v_1v_4v_6v_5v_2v_6.$$

为找出最短邮路(即要求从 v_1 出发,仍回到 v_1 点),需先找出由 v_1 到 v_6 的最短道路(见图 5.2.2 中的虚线,即为一条所求的最短道路).于是由实线和虚线共同组成的图即为 G^*,显然 G^* 是一个欧拉图.

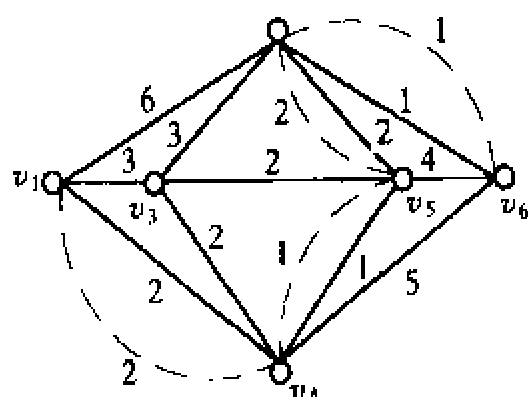


图 5.2.2

其中,$v_1v_4v_5v_2v_6$ 即为由 v_1 到 v_6 的最短道路.

容易验证,用上面的方法得到的欧拉回路,是从图 G 中任一点出发,经过 G 的每一条边至少一次,最后回到出发点的所有路线中最短的路线.

若用 E_R 表示所求的重复边的集合(参照图 5.2.2 中的虚线),则求最短邮路的问题即可归结为求边集 E_R,使得图 G 成为欧拉图,同时满足使:$W(E_R)=\sum\limits_{e\in E_R} w(e)$达到最小.

如果图 G 中奇顶点的个数多于 2 个,那么所求的欧拉回路必将要添加更多的重复边,但应如何使重复边的总长达到最小,这就是下面的定理所要解决的问题.

定理 5.2.1 设 C 是连通图 G 的一条包含 G 的所有边的欧拉回路,则 $\overline{C}$ 具有最小长的充要条件是:

(1) G 的每条边最多重复一次;

(2) 在图 G 的每个回路上,有重复边的边长之和不超过该回

路长的一半.

证明 必要性 (1)是显然的.下证(2).

如果把原来重复的边(注意是只重复一次),都让其不重复,而原来不重复的边,都让其重复一次,这样将使该图上每个顶点的度数改变0或2,显然不改变各顶点度数的奇偶性,故所得图仍为欧拉图.因此,如果一个回路中重复边的边长超过该回路长的一半时,对该回路作如上调整后,重复边的边长将会减少,这与必要性假设产生矛盾.

充分性 只需证明满足定理中条件(1)、(2)的所有回路的长均相等.从而只需证明满足条件(1)、(2)的任两个回路中,重复边的边长均相等即可.

为此,设$\overline{C_1}$,$\overline{C_2}$是两个满足定理中条件(1)、(2)的回路.且,

$$D = E_{\overline{C_1}} \oplus E_{\overline{C_2}} = (E_{\overline{C_1}} \cup E_{\overline{C_2}}) \setminus (E_{\overline{C_1}} \cap E_{\overline{C_2}}),$$

其中$E_{\overline{C_i}}$表示回路$\overline{C_i}$中重复边的集合,$i = 1,2$.

例如,在图5.2.3中,(a)为回路$\overline{C_1}$,(b)为回路$\overline{C_2}$,且:

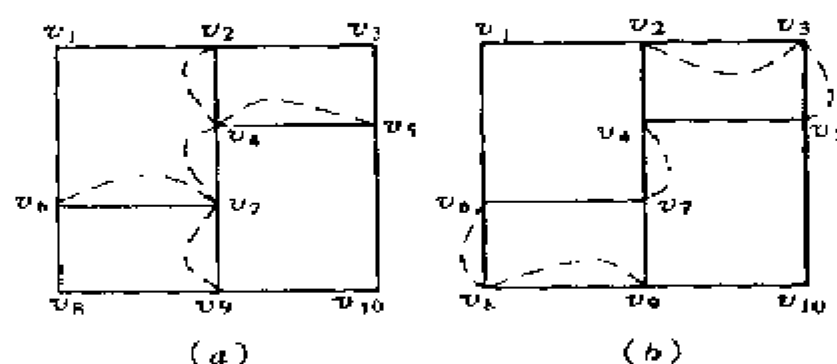


图5.2.3

$E_{\overline{C_1}} = \{(v_2,v_4),(v_4,v_5),(v_4,v_7),(v_6,v_7),(v_7,v_9)\}$.

$E_{\overline{C_2}} = \{(v_2,v_3),(v_3,v_5),(v_4,v_7),(v_6,v_8),(v_8,v_9)\}$.

而$D = E_{\overline{C_1}} \oplus E_{\overline{C_2}}$,见图5.2.4.

这里,D是回路$\overline{C_1}$与$\overline{C_2}$中重复边的环和,即

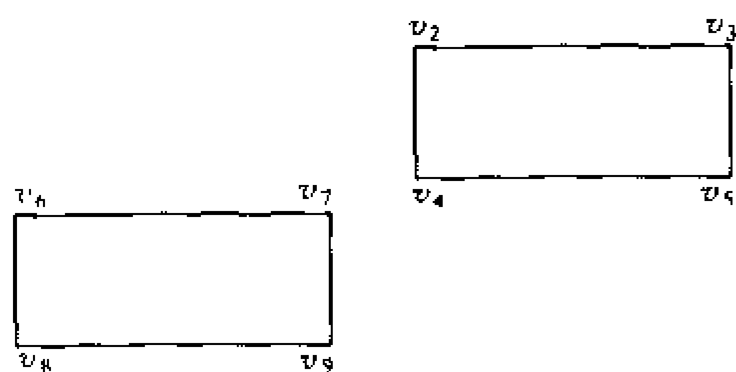


图 5.2.4

$$D = E_{\overline{C_1}} \oplus E_{\overline{C_2}} = (E_{\overline{C_1}} \cup E_{\overline{C_2}}) \setminus (E_{\overline{C_1}} \cap E_{\overline{C_2}}).$$

显然,由边组成的集合 D 所构成的图的每个分支都是欧拉图(事实上,对图 G 的每个顶点 v 来说,回路$\overline{C_1}$与回路$\overline{C_2}$所添加的边数或者同为奇数,或者同为偶数,从而两者拼起来所得的边数一定仍然是偶数.从而顶点 v 在D 中的度数必为偶数).这表明,D 为回路的不重并.但在 D 的每一个回路上,由题目假设,$E_{\overline{C_1}}$与 $E_{\overline{C_2}}$的边长均不会超过该回路长的一半,故它们只能相等,且都等于该回路长的一半.这样,我们就得到

$$\sum_{e \in E_{\overline{C_1}}} w(e) = \sum_{e \in E_{\overline{C_2}}} w(e),\text{从而有:} \sum_{e \in \overline{C_1}} w(e) = \sum_{e \in \overline{C_2}} w(e).$$

根据定理 5.2.1 可以构造中国邮路问题的算法如下:

因为图 G 中顶点度数为奇数的顶点个数一定是偶数,故不妨设这 $2k$ 个度为奇数的顶点分别为:$v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$.

我们可将算法归结为如下四个步骤:

第一步:分别找出由 v_1 到 v_2,由 v_3 到 v_4,…,由 v_{2k-1}到 v_{2k}的道路 p_i(p_i 是由 v_{2i-1}到 v_{2i}的道路,$i=1,2,\cdots,k$).并对道路 p_i 的每条边附加一条边,使该边成为重复边;

第二步:再来检查图 G 的每条边.若第一步所添加的重复边使某边的重复边数超过一条,则删除其中偶数条边,使得 G 的每条边至多有一条添加的边,且其中每一个顶点的度数均为偶数,从而得到图 $G^{(0)}$.将图 $G^{(0)}$中重复边的集合记为 $E^{(0)}$;

第三步:对图 $G^{(0)}$中的每一个回路(也称回路为圈)作检查.若有某个圈中重复边的长超过该圈长的一半,则将该圈中原来重复的边改为不重复,而将原来不重复的边都重复一次,得到图 $G^{(1)}$,图 $G^{(1)}$中重复边的集合记为 $E^{(1)}$;

第四步:继续重复做第三步的工作,直到对图 G 中每一个圈中重复边的长均不超过圈长的一半时为止,即得到中国邮路问题的最优解.

我们来看一个具体的例子.

例 5.2.2 如图5.2.5所示,图中给出了一个邮递员负责投递范围内的街道示意图.

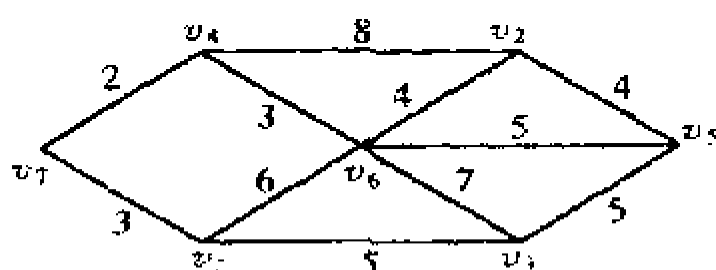


图 5.2.5

下面来求最短投递路线.

图中顶点 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 均为奇度数的顶点,先求出由 v_1 到 v_2 的道路:$P_1 = v_1v_3v_5v_2$;再求出由 v_3 到 v_4 的道路:$P_2 = v_3v_1v_7v_4$;再求出由 v_5 到 v_6 的道路:$P = v_5v_2v_4v_6$,并对 P_1, P_2, P_3 道路的每一条边附加一条边,如图 5.2.6 所示.

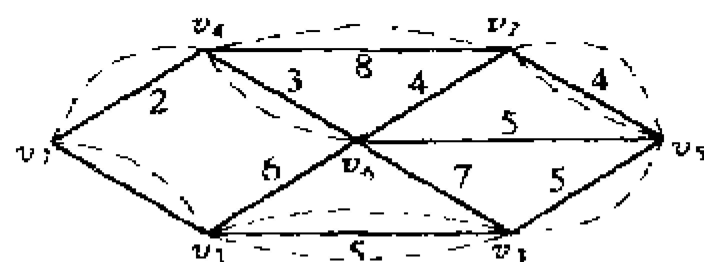


图 5.2.6

因为图中边(v_1,v_3)与边(v_2,v_5)均重复了两次，故将这四条重复的边全部删除，即得到图 $G^{(0)}$，如图 5.2.7 所示.

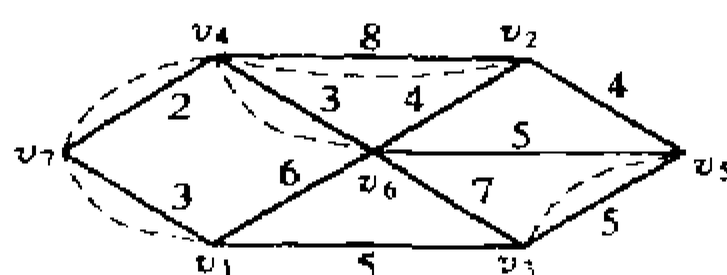


图 5.2.7

现在图 $G^{(0)}$中已经不存在重复边数超过 1 的边，故接下来再检查 $G^{(0)}$中的每一个圈.

在圈 $v_1v_6v_4v_7$ 中，重复边的边长之和大于圈长的一半，故将这些重复边去掉，而添加上边(v_1,v_6)，如图 5.2.8 所示.

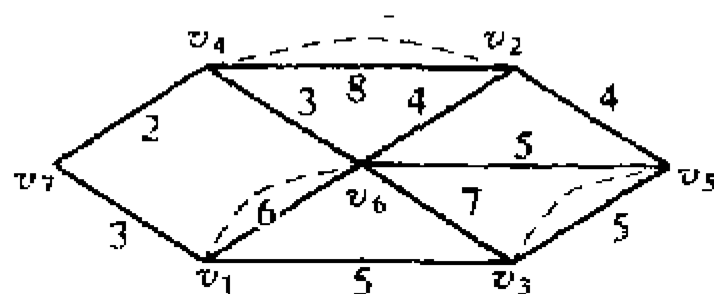


图 5.2.8

再在图 $v_1v_6v_2v_4v_7v_1$ 中去掉重复边，而添上边(v_6,v_2)，(v_4,v_7)，(v_7,v_1)，如图 5.2.9 所示.

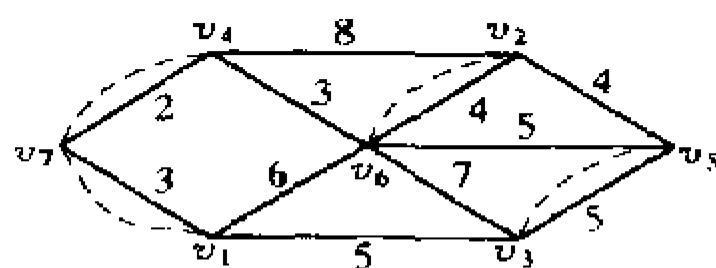


图 5.2.9

最后，在圈 $v_1v_3v_5v_2v_6v_4v_7v_1$ 中，去掉重复边，而添上边(v_1, v_3)，(v_5, v_2)，(v_6, v_4). 得到图 5.2.10.

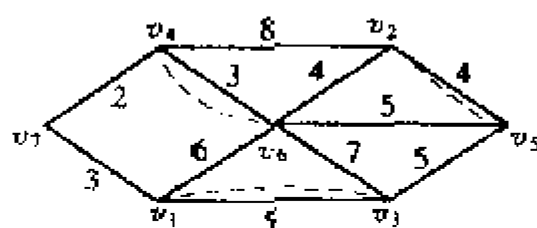


图 5.2.10

容易验证，图 5.2.10 中每一个圈中的重复边的边长之和均不超过该圈长的一半，故它为最短投递路线.

上面给出的方法也称为"奇偶点图上作业法". 显然，每个最短投递路线都可以用"奇偶点图上作业法"来求得解答. 但需要注意的是，应用此方法时要检验所有的每一个圈(这里，把每一个由不同边构成的回路均称为圈). 且每次对所考虑圈之边的修改，还可能影响到已修改过的圈之重复边. 故最后一定要对所有可能圈都进行检验，才能得出最短投递路线.

§5.3 最小树

定义 5.3.1 设 T^* 是赋权图 $G=(V,E,W)$ 的一棵生成树，若对图 G 的任意生成树 T，都有：$l(T^*)\leqslant l(T)$，则称 T^* 为图 G 的一棵最小树. 其中，$l(T)=\sum\limits_{e\in T} w(e)$ 为树 T 的所有边 e 的权的和.

下面讨论最小树的性质.

为了讨论方便起见，我们用 $C_T(e')$ 来表示由连枝(弦)e' 所确定的关于生成树的基本回路. 用 $S_T(e)$ 表示由树枝 e 所确定的关于生成树的基本割集.

定理 5.3.1 设 T 是图 G 的一棵生成树，则下列条件都是 T 为最小树的充要条件：

(1) 对于任意弦 $e'\in G\setminus T$，有

$$w(e')=\max_{e\in C_T(e')}\{w(e)\};$$

(2) 对图 G 中任意圈 C，存在 $e'\in C\setminus T$，有

$$w(e')=\max_{e\in C}\{w(e)\};$$

(3) 对任意树枝 $e\in T$，有

$$w(e)=\min_{e'\in S_T(e)}\{w(e')\};$$

(4) 对图 G 的任意割集 S，$T\cap S$ 中存在一条边 e，有

$$w(e)=\min_{e'\in S_T(e)}\{w(e')\}.$$

其中，$w(e)$ 表示边 e 的权.

证明 显然，因为这些命题中含有包含关系，我们只证明(2)的必要性及(1)的充分性.

先证命题(2)的必要性.

设 T^* 是图 G 的一棵最小生成树，去证对 G 的任意圈 C，存在 $e'\in C\setminus T^*$，有

$$w(e')=\max_{e\in C}\{w(e)\}.$$

若命题不成立，即在 G 中存在一个圈 C_0 及 $e\in C_0\cap T^*$，对任意 $e'\in C_0\setminus T^*$，有 $w(e)>w(e')$.

显然，$e\in S_{T^*}(e)\cap C_0\neq\varnothing$. 对于 $e_0\neq e$，$e_0\in S_{T^*}(e)\cap C_0$，由于 e 是 $S_{T^*}(e)\cap T^*$ 的唯一元素，故 $e_0\in C_0\setminus T^*$，因此 $w(e_0)<w(e)$. 现考虑 $T'=T^*-e+e_0$，因为 e 与 e_0 同属于 $S_{T^*}(e)$，所以 T' 也是 G 的一棵生成树，但

$$l(T')=l(T^*)-w(e)+w(e_0)<l(T^*),$$

此与 T^* 是最小树的假设矛盾.

再证(1)的充分性. 设 T^* 是图 G 的一棵生成树，且对任意的 $e'\in G\setminus T^*$，都有，$w(e')=\max\limits_{e^*\in C_{T^*}}\{w(e^*)\}$，去证 T^* 是最小树.

若 T^* 不是最小树，那么取一棵 G 的最小树 T，使 $|T\cap T^*|$ 为最大.

再取 $e' \in T^* \setminus T$，显然，$e' \in S_{T^*(e')} \cap C_T(e')$，故存在一条边 $e^* \neq e'$，且 $e^* \in S_{T^*(e')} \cap C_T(e')$，于是 $e^* \in T^* \setminus T$. 令 $T' = T - e' + e^*$，则因为：$w(e^*) \leqslant w(e')$，所以 $l(T') \leqslant l(T^*)$，即 T' 也是最小树，但 $|T \cap T'| = |T \cap T^*| + 1 > |T \cap T^*|$，此与 T 的取法矛盾，故 T^* 必为最小树.

类似于§2.4所介绍的生成树的求法，下面给出求最小树的两种算法.

一、避圈法

先将赋权图 $G=(V,E,W)$ 的边按各边的权的递增顺序排列：

$$w(a_1) \leqslant w(a_2) \leqslant \cdots \leqslant w(a_m),$$

其中，$a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为图 G 的边集 $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ 的一个排列. 且 $|V| = n$，$|E| = m$.

再取 $e_1' = a_1$，$e_2' = a_2$，然后检查 a_3.

若 a_3 不与 e_1'，e_2' 构成圈，则令 $e_3' = a_3$. 若 a_3 与 e_1'，e_2' 构成圈，则放弃 a_3；并继续检查 a_4，若 a_4 不与 e_1'，e_2' 构成圈，则令 $e_3' = a_4$. 否则，放弃 a_4，并继续检查 a_5；如此继续下去，直到找到一个以 e_1'，e_2'，$\cdots$，e_{n-1}' 为边的且不含任意圈的连通图为止. 此时，$\{e_1', e_2'\cdots, e_{n-1}'\}$ 即为所求的一棵最小树.

例 5.3.1 求如图5.3.1中所示的赋权图 $G=(V,E,W)$ 的一棵最小树.

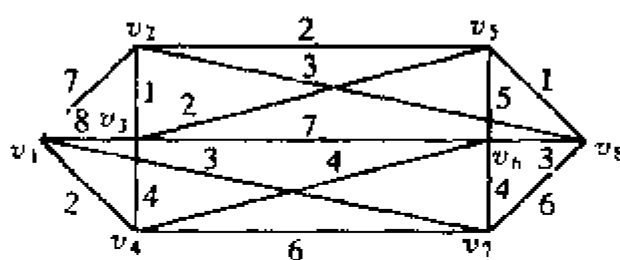


图 5.3.1

首先，将边按权的递增顺序排列：

$a_1 = (v_2, v_3)$（权为 1），$a_2 = (v_5, v_8)$（权为 1），

$a_3=(v_1,v_4)$（权为 2），$a_4=(v_2,v_5)$（权为 2）.

接下来，依次有：

$$a_5=(v_3,v_5),a_6=(v_2,v_8),a_7=(v_1,v_7),$$
$$a_8=(v_6,v_8),a_9=(v_3,v_4),a_{10}=(v_4,v_6),$$
$$a_{11}=(v_6,v_7),a_{12}=(v_5,v_6),a_{13}=(v_4,v_7),$$
$$a_{14}=(v_7,v_8),a_{15}=(v_1,v_2),a_{16}=(v_3,v_6),$$
$$a_{17}=(v_1,v_3).$$

我们用符号：$a_i(k)$表示边 a_i 所赋有的权 k，则可由图 5.3.2 来表示.

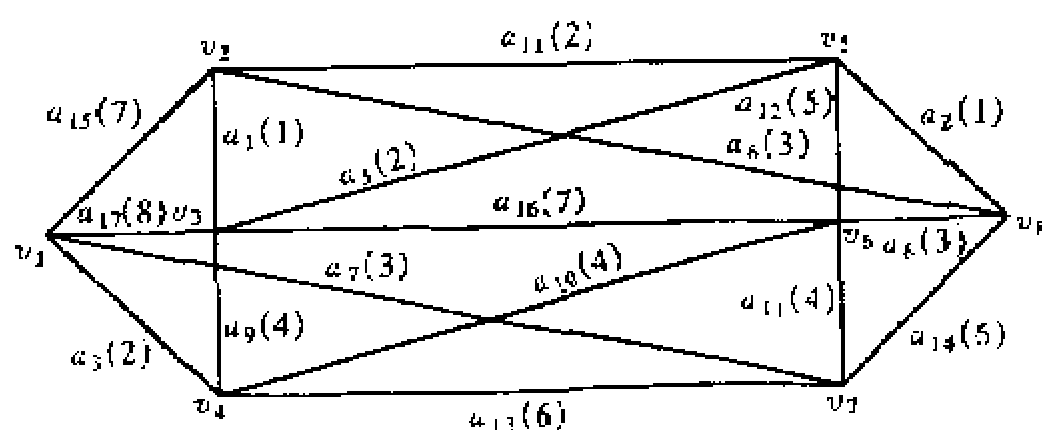


图 5.3.2

依避圈法，可依次取：$e_1'=a_1,e_2'=a_2,e_3'=a_3,e_4'=a_4,e_5'=a_7,e_6'=a_8,e_7'=a_9$，则由 $e_1',e_2',e_3',e_4',e_5',e_6',e_7'$ 构成的连通图即为图 5.3.2 的一棵最小树. 如图 5.3.3 中的实线所示.

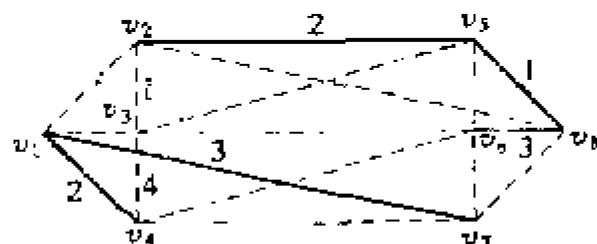


图 5.3.3

即 $v_6v_8v_5v_2v_3v_4v_1v_7$ 为一棵最小树，且它的权为：

$$3+1+2+1+4+2+3=16.$$

二、破圈法

首先，在赋权图 $G=(V,E,W)$ 中任取一个圈；然后，去掉这个圈中权最大的边；接下来，再在新得到的图中任取一个圈，同上面一样，也去掉该圈中权最大的边；如此继续重复前面的步骤，直到图中不再含有圈为止. 这时，剩下的边所构成的子图即为图 G 的一棵最小树.

例 5.3.2 在例5.3.1中给出的图 5.3.1 中，首先取定一个圈：$v_1v_3v_2v_1$，去掉权最大的边 (v_1,v_3) 得图 5.3.4，图中虚线表示去掉的权最大的边.

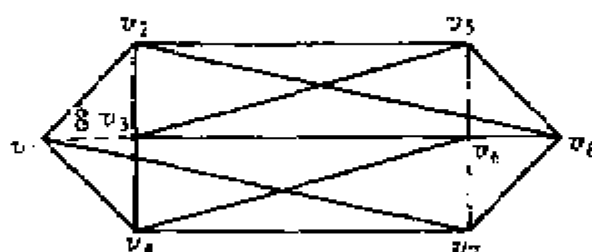


图 5.3.4

在上图中，再任取一圈：$v_1v_4v_2v_1$，并去掉权最大的边 (v_1,v_2)，得图 5.3.5.

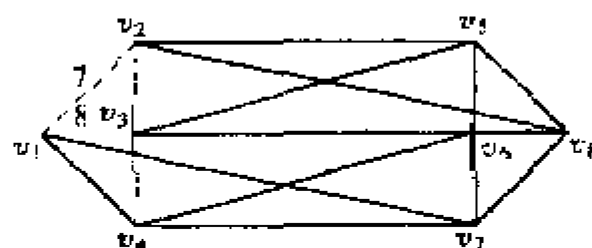


图 5.3.5

接下来，去掉(v_4, v_7)，得图 5.3.6.

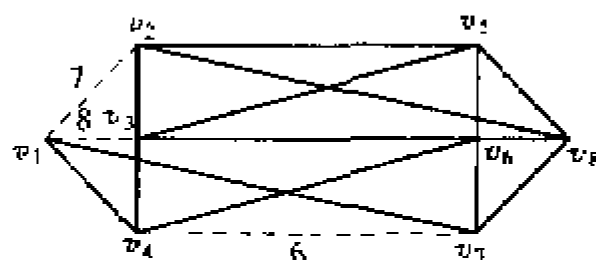


图 5.3.6

再去掉边(v_3, v_6)，得图 5.3.7.

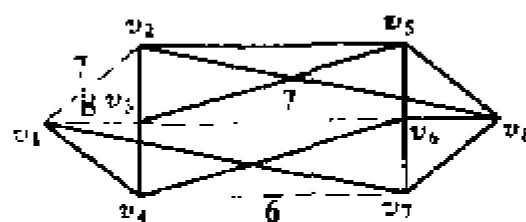


图 5.3.7

再去掉边(v_7, v_8)，得图 5.3.8.

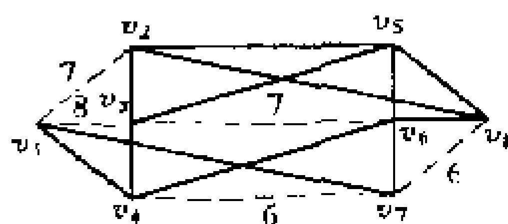


图 5.3.8

再分别去掉(v_5, v_6)，(v_2, v_8)，得图 5.3.9.

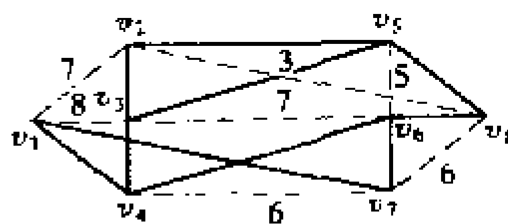


图 5.3.9

再分别去掉(v_2,v_5),(v_4,v_6),得图 5.3.10.

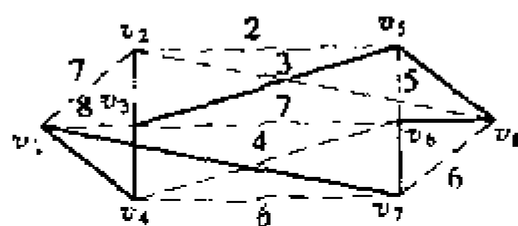


图 5.3.10

最后在圈 $v_3v_5v_8v_6v_7v_1v_4v_3$ 中去掉边(v_3,v_4),得图 5.3.11.

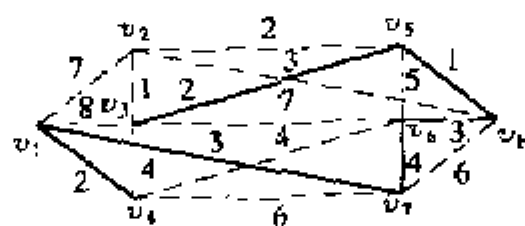


图 5.3.11

于是也得到一棵最小树 $v_4v_1v_7v_6v_8v_5v_3v_2$,容易算得它的权也是 16.

由例 5.3.1、例 5.3.2 可知:对于一个连通图 G 来说,它的最小树并不是唯一的,但它们的权是相同的.

§5.4 推销员问题与哈密顿回路

所谓"推销员问题"是指:某推销员从其驻地出发,要求他经过所有与其有业务往来的城市至少一次,最后返回出发地.问应如何安排其旅行路线,而使总的旅行距离最短?类似地,还可以推广为使旅行费用最少或使旅行时间最短等等.

1 859 年,爱尔兰数学家威廉·哈密顿提出一个关于正十二面体的数学游戏:考虑用正十二面体的 20 个顶点来代表 20 个城市,要求旅行者从某一城市(即某一个顶点)出发,遍经各城市(即各顶点)一

次且仅一次,最后返回出发地.由于将每个顶点均看作一个城市,而将两个顶点间的边看作交通线,因此,通常人们也称此问题为"环球航行问题"或"周游世界问题".

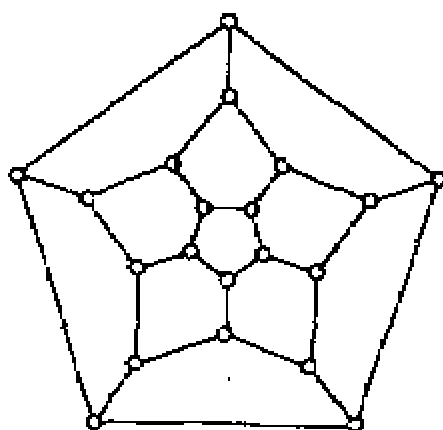


图 5.4.1

"环球航行问题"用图论的语言来说,就是在十二面体的图中,找出一条通过每个顶点的回路(或称为圈).见图 5.4.1.

显然,对于任何一个连通图 G,都可以提同样的问题:图 G 中是否存在经过所有顶点一次且仅一次的回路?

为了进一步研究这类问题,我们给出:

定义 5.4.1 经过图 G 的每个顶点一次且仅一次的道路称为哈密顿道路;经过图 G 中的每个顶点一次且仅一次的回路称为哈密顿回路.

若图 G 中存在一条哈密顿回路,则称该图 G 为哈密顿图.

关于定义 5.4.1,我们给出以下几点补充说明:

(1) 若图 G 中存在一条哈密顿道路,则图 G 一定是一个连通图;

(2) 若图 G 中存在哈密顿回路,则 G 中一定存在哈密顿道路,但其逆不真;

(3) 依照定义,只有哈密顿道路,而没有哈密顿回路的图,不是哈密顿图.

例 5.4.1 如图5.4.2所示,(a)中只有哈密顿道路,而没有哈密顿回路,故(a)不是哈密顿图.而(b)不是连通图,故显然(b)也不是哈密顿图.最后,在(c)与(d)中,都存在着哈密顿回路(当然也有哈密顿道路),故(c)、(d)均为哈密顿图.

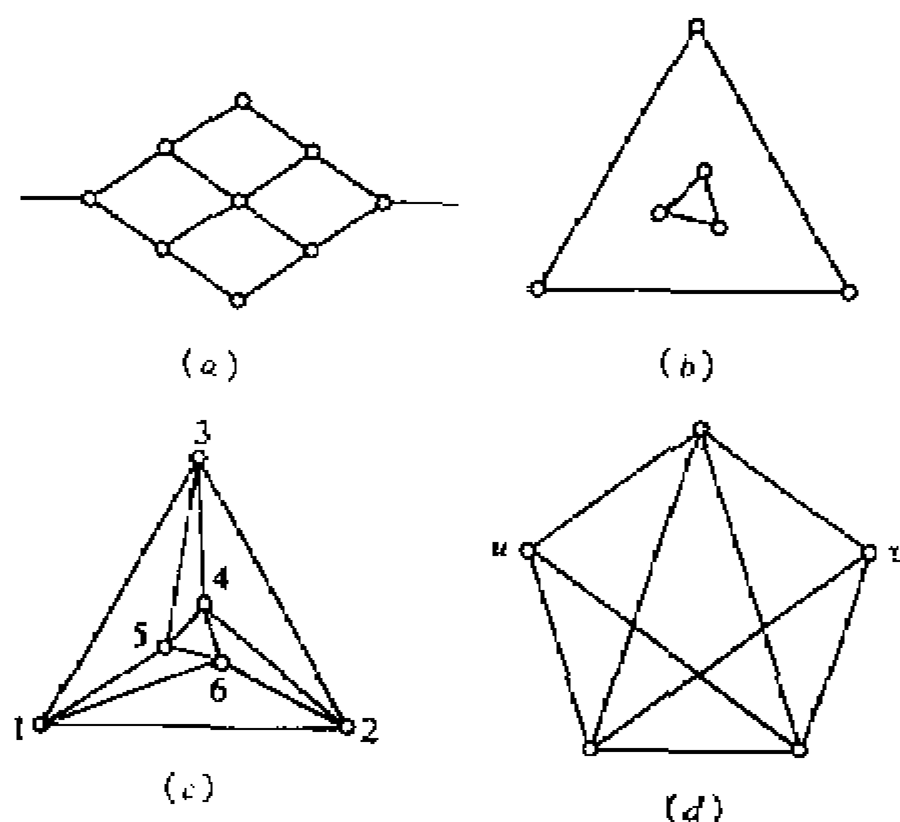


图 5.4.2

目前,虽然已经知道关于哈密顿图的若干必要的或充分的条件.但是,找哈密顿图的一个简洁而有用的特征,使之不仅仅是定义的一个隐蔽的同义语.换言之,即给出判断一个图是否为哈密顿图的充要条件,这一直是一个诱人而至今尚未解决的问题.

下面我们给出一个图 G 是哈密顿图的一个必要条件.

定理 5.4.1 若图 $G=(V,E)$是哈密顿图,则对于顶点集 V 的每一个非空真子集S,导出子图 $G-S$ 的分支数目$k(G-S)$均满足:

$$k(G-S)\leqslant|S|.$$

证明 设 C 是图G 的一个哈密顿回路.

先来考虑两种特殊情形.

(1) S 中只含有 C 中的诸邻接顶点,此时图 $C-S$ 显然是一条道路,因而有 $k(C-S)=1$.

(2) S 中含有 r 个在 C 中均不邻接的顶点,此时图 $C-S$ 有 r 个分支,于是有 $k(C-S)=r$,且 $|S|\geqslant r$.

由(1)可知,在 C 中删去相邻接的顶点后,分支数不会改变.

由(2)又可知,在 C 中删去 r 个互不邻接的顶点后,$C-S$ 的分支数恰为 r.

从而,如果 S 中即含有邻接的顶点,又含有不邻接的顶点,则我们有 $k(C-S)\leqslant|S|$.

另外,因为 $C-S$ 是 $G-S$ 的一个生成子图,因而必有

$$k(G-S)\leqslant k(C-S)\leqslant r=|S|.$$

定理 5.4.1 给出了一个图 G 是哈密顿图的必要条件.因此,对于一个给定的图 G,只要它不满足定理 5.4.1 的条件,就可以断定它不是哈密顿图.如在图 5.4.3 中删去 a,b,c 三个顶点,则得到四个分支,不满足定理 5.4.1 中的条件,故这个图不是哈密顿图.但是,一个非哈密顿图却可以满足定理 5.4.1 的条件,例如图 5.4.4 所示的图不是哈密顿图,但它却满足定理 5.4.1 中的条件.

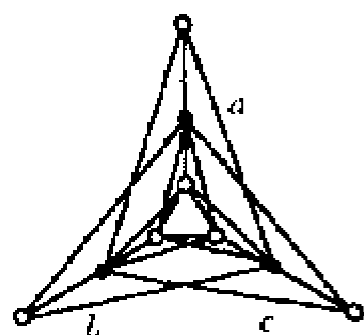


图 5.4.3

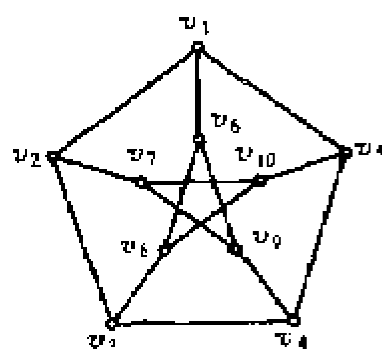


图 5.4.4

下面给出图 G 是哈密顿图的一个充分条件.

定理 5.4.2 设图 G 是一个 $n(n\geqslant3)$ 阶简单图,v 是 G 中有最

小度数的顶点，如果满足：$d(v)\geqslant\frac{n}{2}$，则 G 是哈密顿图.

证明 若定理的结论不成立，并设图 G 是一个 $n\geqslant3$ 阶的且顶点的最小度数 $\geqslant\frac{n}{2}$ 的最大非哈密顿图（所谓最大是指：在图 G 中任意不相邻的两个顶点间连一条边，则 G 就变为哈密顿图）.

因为 G 不是哈密顿图，所以 G 不是完全图. 设 u 和 v 是图 G 的不邻接的顶点，由 G 的最大非哈密顿性，知 $G+uv$ 是一个哈密顿图. 此外，由于 G 是非哈密顿图，所以图 $G+uv$ 的每一个哈密顿圈必然包含边 (u,v). 于是，在 G 中存在一个起点为 $u=v_1$，终点 $v=v_n$ 的哈密顿道路：$p=v_1v_2\cdots v_n$. 令

$$S=\{v_i\mid 边(u,v_i)\in E\}$$
$$T=\{v_i\mid 边(v_i,v)\in E\}，$$

其中 E 为图 G 的边集合.

因为 $v_n\notin S\cup T$，所以 $|S\cup T|<n$，而且 $|S\cap T|=0$. 事实上，若 $S\cap T$ 包含某个顶点 v_i，则 G 将有哈密顿圈：$v_1v_2\cdots v_iv_nv_{n-1}\cdots v_{i+1}v_1$，此与假设矛盾. 见图 5.4.5.

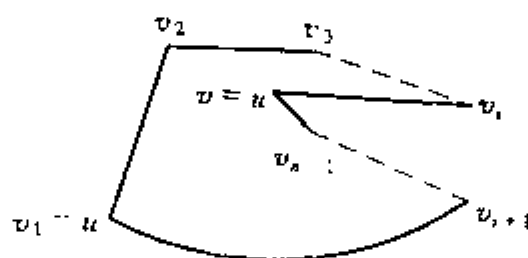


图 5.4.5

这样，$|S\cup T|<n$，$|S\cap T|=0$，得

$d(u)+d(v)=|S|+|T|=|S\cup T|+|S\cap T|<n$，这与题设图 G 的最小度 $\geqslant\frac{n}{2}$ 的假设矛盾. 故 G 是哈密顿图.

定义 5.4.2 给定赋权图 $G=(V,E,W)$.

称经过图 G 的每个顶点至少一次，且总长度（权）最短的回路为

最优推销员回路；

称经过图 G 的每个顶点一次且仅一次，并且总长度最短的回路为最优哈密顿回路.

一般来说，在同一个图 G 中，最优推销员回路与最优哈密顿回路并不一定是相同的.例如，在如图 5.4.6 所示的图中：

最优哈密顿回路为：$H = v_1v_3v_2v_1$，如图 5.4.7(a)所示(图中实线)且其总长为 12；而最优推销员回路为：$T = v_1v_3v_2v_3v_1$，如图 5.4.7 所示(图中实线)且其总长为 4.

这里，$l(H)=12>4=l(T)$.

显然，当顶点允许重复时，可使巡回路线的总长相应地缩短.

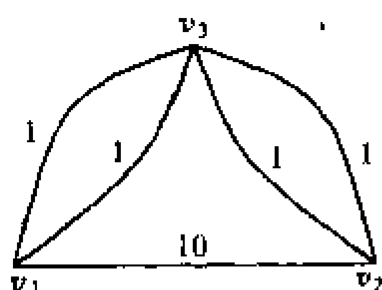


图 5.4.6

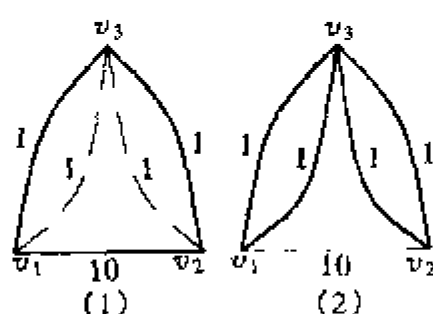


图 5.4.7

定理 5.4.3 若在赋权图 $G=(V,E,W)$中，任意两个顶点 v_i 与 v_j 均满足如下的三角不等式

$l_{ij} \leqslant l_{ik} + l_{kj}$，$v_i, v_j, v_k \in V$；

式中：$v_i \neq v_j$，$v_i \neq v_k$，$v_j \neq v_k$，l_{ij}表示顶点 v_i 到顶点 v_j 道路的长.这里，顶点 v_i 与 v_j 并不一定是邻接的.则图 G 的最优推销员回路与最优哈密顿回路一定相等.

证明 因为图 G 中所有各顶点之间皆满足三角不等式.所以如果图 G 的推销员回路的最优解 Φ 不是哈密顿回路，则必定存在 G 的某些顶点，使这些顶点在 Φ 中重复经过.设这些重复点所构成的集合为 V_1.

我们在 V_1 中任取一顶点 v，则 v 在回路中至少出现两次.设推

销员第一次经过 v 所走的路线为：从 v_i 到 v，再从 v 到 v_j. 现将回路中从 v_i 到 v，再从 v 到 v_j 的道路改为从 v_i 直接到 v_j，则可得到新的推销员回路 Φ_1，且在回路 Φ_1 中，其总长度不会增加（这由题设的三角不等式即知），通过 G 中的各顶点仍然是至少一次. 故可用 Φ_1 来代替 Φ. 这时，回路 Φ_1 中所包含的边数比 Φ 减少了一条，顶点的重复通过也减少了一次.

接下来，再在回路 Φ_1 中选一个重复经过的顶点，继续上面的论证修改过程，最终可以得到一个通过图 G 的各个顶点一次且仅一次的最优推销员回路，显然这个回路即为哈密顿回路.

根据定理 5.4.3，我们得出了一个图 G 的最优推销员回路与最优哈密顿回路的等价条件：

对任一赋权连通图 $G=(V,E,W)$，我们可以先利用图 G 中任意两点之间的最短路之算法来构造一个满足定理 5.4.3 中三角不等式的图 G'，G' 中各顶点之间的距离都用这两点间的最短路的长代替. 于是，由定理 5.4.3 求图 G' 的最优推销员回路问题即可归结为求该图的最优哈密顿回路问题.

下面，我们通过一个具体的实例，给出求最优哈密顿回路的解法.

例 5.4.2 今给定 5 个城市：v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

我们用 l_{ij} 表示由城市 v_i 到城市 v_j 的距离，且规定 $l_{ii}=\infty$.

已知 5 个城市间的距离矩阵 L 为：

$$L=(l_{ij})_{5\times5}=\begin{pmatrix}\infty & 11 & 1 & 17 & 2\\ 11 & \infty & 23 & 1 & 3\\ 1 & 23 & \infty & 10 & 8\\ 17 & 1 & 10 & \infty & 6\\ 2 & 3 & 8 & 6 & \infty\end{pmatrix}\begin{matrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5\end{matrix}$$

矩阵 $L=(l_{ij})$是对称的，这表示从城市 v_i 到城市 v_j 的距离等于从城市 v_j 到城市 v_i 的距离．若从城市 v_i 到 v_j 是单行道时(即矩阵 L 为非对矩矩阵)，情况则要复杂得多．本书只讨论矩阵 L 为对称时的情形．

具体解法如下：

(1)先从 5 个城市中找出距离最短的 5 条边，分别为

$(v_1,v_3)=1,(v_2,v_4)=1,(v_1,v_5)=2,(v_2,v_5)=3,$

$(v_4,v_5)=6$，且 $l_{13}+l_{24}+l_{15}+l_{25}+l_{45}=1+1+2+3+6=13.$

从图 5.4.8 中，可知这 5 条边不能构成哈密顿回路(因顶点 v_5 的度数大于 2)．

为求最优哈密顿回路，我们给出如下的"分枝定界法"．

(2)先考虑排除边(v_1,v_5)的情况．此时可选取排除边(v_1,v_5)后的最短边(v_3,v_5)来代替(v_1,v_5)．如图 5.4.9 所示．

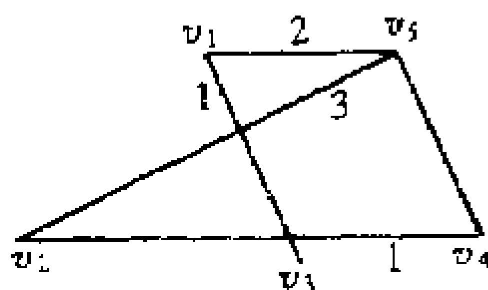


图 5.4.8

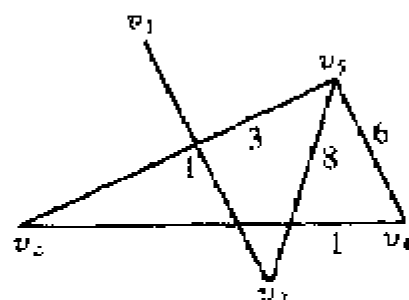


图 5.4.9

图中总长度为：$l_{13}+l_{24}+l_{35}+l_{25}+l_{45}=19$．

与图 5.4.8 一样，现在顶点 v_5 的度数仍然大于 2．并且注意到：当保留边(v_1,v_5)时，得下界(总长度)为 13，而排除边(v_1,v_5)时，得下界为 19，故应仍然沿着保留(v_1,v_5)的条件往下搜索．

(3)保留(v_1,v_5)边，而排除(v_2,v_5)边，并以边(v_3,v_5)来代替(v_2,v_5)．如图 5.4.10 所示．其总长度为：$l_{13}+l_{24}+l_{15}+l_{35}+l_{45}=18$，且 v_5 的度数>2，故仍不合理．

(4)保留边(v_1,v_5)与边(v_2,v_5)，并排除边(v_4,v_5)而代之以

(v_3, v_5),得图 5.4.11.其总长度为:$l_{13}+l_{24}+l_{25}+l_{15}+l_{35}=15$,且 v_5 的度数>2,仍然不合理.

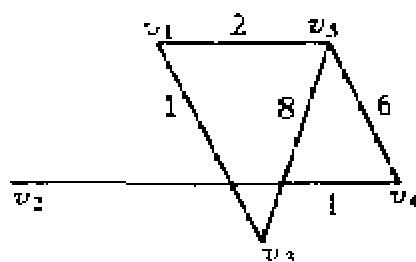


图 5.4.10

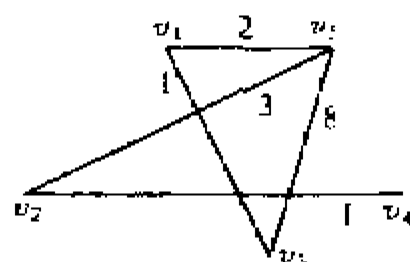


图 5.4.11

(5)在保留边(v_1, v_5)与边(v_2, v_5)同时排除边(v_4, v_5)与(v_3, v_5)的条件下,只能再添加边(v_3, v_4),得图 5.4.12.其总长度为:$l_{13}+l_{24}+l_{25}+l_{15}+l_{34}=17$.

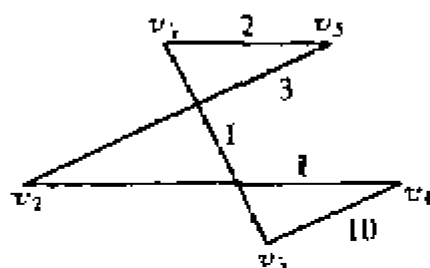


图 5.4.12

显然图 5.4.12 已构成了一个哈密顿回路.

而由(2)及(3)所得的下界均已超过 17,故已经没有继续搜索下去的必要.故,$P=v_1v_3v_4v_2v_5v_1$ 即为一条最优哈密顿回路,同时也是一条最优推销员回路.

上面是利用"分枝定界"的方法,逐次在图上排除边或添加边而得到最优解的.下面,我们再来介绍一种直接利用矩阵的方法来求最优解的算法.

例 5.4.3 设给定 5 个城市 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 的旅费矩阵为:

$$D = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & \infty & 2 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & \infty & 8 & 7 \\ 4 & 10 & 8 & \infty & 1 \\ 6 & 9 & 7 & 1 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3, \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

其中 d_{ij}表示由城市 v_i 到 v_j 的旅行费用,并且 $d_{ij}=d_{ji}$,即 $D=(d_{ij})$ 是对称矩阵.

我们给出求从任一城市出发,经每个城市一次且仅一次,最后回到出发地的最小旅行费用的算法如下:

首先,在矩阵 D 的每一行中选取最小元素,并令矩阵每一行的所有元素都减去该行的最小元素,得到矩阵 D_1,

$$D_1 = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & \infty & 0 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & \infty & 6 & 5 \\ 3 & 9 & 7 & \infty & 0 \\ 5 & 8 & 6 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2, \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

其中,D_1 右边所列数字表示该行所减去的数字(即为 D 中各行的最小元素).

再用 D_1 的各列的所有元素都减去该列的最小元素,得到矩阵 D_2,

$$D_2 = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & \infty & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & \infty & 6 & 5 \\ 2 & 9 & 7 & \infty & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 2, \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

其中,D_2 下边所列数字表示该列所减去的数字(即为 D_1 中各列的最小元素).

我们将每次所减去的数字总和写在该矩阵的左下角,而不再将这些数字全部在右边(或下边)列出.从而,D_2 可写为:

$$D_2 = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & \infty & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & \infty & 6 & 5 \\ 2 & 9 & 7 & \infty & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}.$$

10

$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

对于用每行的最小元素分别去减该行的所有元素，我们做以下说明：

第一行全部减去了最小元素 3，这表示从城市 v_1 到其余 4 个城市的旅费一律降价 3，对于其他行也都可以做同样的理解.

至于列的情形，比如第一列都减去了最小元素 1，即可认为从其他各城市出发，到 v_1 的旅费一律降价 1，等等.

因为我们要求推销员进入每个城市一次且仅一次，同时从该城市出去一次也仅一次. 所以以 D_2 为旅费矩阵的最优解和以 D 为旅费矩阵的最优解是一样的（只不过总费用相差 10）.

从而，只需讨论以 D_2 为旅费矩阵的推销员问题的最优解.

D_2 的显著特点是每行、每列都至少有一个数字是 0. 这样如果从 v_1 出发，注意到：$d_{13}=0$，必然选择 v_3 来做为下一站.

接下来，在矩阵 D_2 中划去 d_{13}所在的第一行与第三列，并将 d_{13} 改为∞（这样做是为了避免出现：$v_1 \to v_3 \to v_1$ 的现象，它显然不符合问题的要求）. 划去第一行及第三列的原因在于要求每个城市进出仅一次. 于是得到矩阵 D_3，

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & \infty & 8 & 7 \\ \infty & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 9 & \infty & 0 \\ 4 & 8 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}.$$

$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

D_3 中第一行没有零元素出现，故用该行的最小元素 2 去减各元素，得矩阵 D_4，

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & \infty & 6 & 5 \\ \infty & 0 & 6 & 5 \\ 2 & 9 & \infty & 0 \\ 4 & 8 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}.$$
$$\underset{12}{} \qquad v_1 \quad v_2 \quad v_4 \quad v_5$$

D_4 左下角外面的数字 12＝10＋2 是由原来的 10 加上这次的 2 所得到的.

因 $d_{32}=0$,所以自然选择 v_3 的下一站为 v_2. 同时将 d_{32}所在的第二行与第二列去掉,d_{21}改为∞,将 d_{21}改为∞是为了避免出现:$v_1 \to v_3 \to v_2 \to v_1$ 的现象,这不符合推销员问题的要求,于是得到 D_5,

$$D_5 = \begin{pmatrix} \infty & 6 & 5 \\ 2 & \infty & 0 \\ 4 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}.$$
$$\underset{12}{} \qquad v_1 \quad v_4 \quad v_5$$

同样用 D_5 的第一行最小元素 5 去减该行的所有元素,再用第一列的最小元素 2 去减该列的所有元素,得到矩阵:D_6,

$$D_6 = \begin{pmatrix} \infty & 1 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 2 & 0 & \infty \end{pmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}.$$
$$\underset{19}{} \qquad v_1 \quad v_4 \quad v_5$$

再接下来,因为 $d_{25}=0$,故自然选择 v_2 的下一站为 v_5,同时将 d_{25}所在的第一行及第三列去掉,并将 d_{52}改写为∞,得到 D_7,

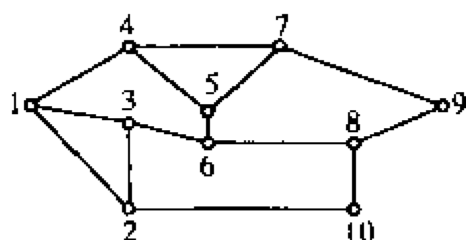
$$D_7 = \begin{pmatrix} 0 & \infty \\ \infty & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_4 \\ v_5 \end{matrix}.$$
$$\underset{19}{} \qquad v_1 \quad v_4$$

最后,v_5 的下一站必然只有选 v_4,于是得一条最优推销员回路为:$v_1v_2v_3v_5v_4v_1$,且其旅行费用为 19.

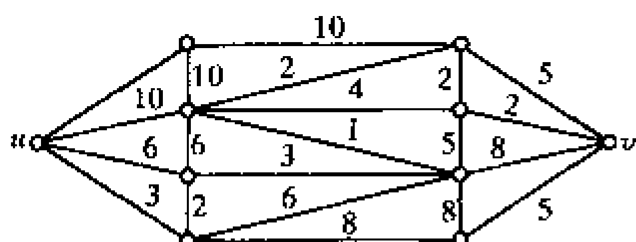
习题五

1. 证明：n 阶完全图 K_n 是哈密顿图.

2. 题图 5.1 中的图 G 是否是哈密顿图？若是，试画出它的一个哈密顿回路.



题图 5.1



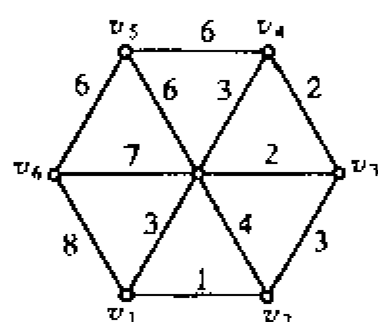
题图 5.2

3. 证明：若图 G 是二部图，且它的顶点集的二分划 (V_1, V_2) 有：$|v_1| \neq |v_2|$，则图 G 一定不是哈密顿图.

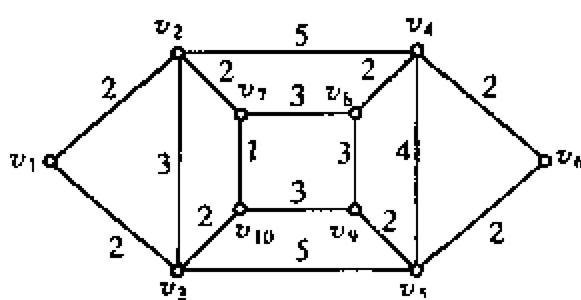
4. 证明：若图 G 中存在一顶点 v，使得 $d(v)=1$，则 G 必不是哈密顿图.

5. 求题图 5.2 所示的图 G 中顶点 u 和 v 之间的最短道路.

6. 求题图 5.3 中两图的最小树.



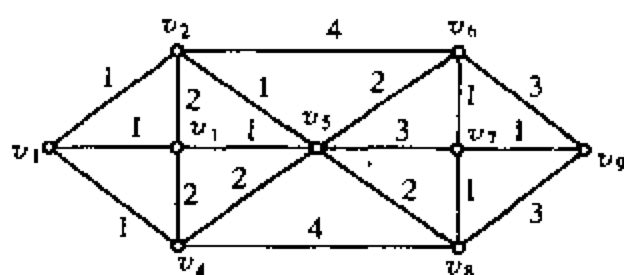
(a)



(b)

题图 5.3

7. 求题图 5.4 所示的图中的中国邮路问题.



题图 5.4

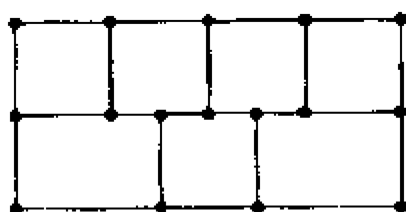
8. 已知世界 6 个城市:北京(B),纽约(N),巴黎(P),伦敦(L),东京(T),墨西哥(M),试求在由下面矩阵确定的交通网络中的最优解.

$$D=\begin{pmatrix} \infty & 13 & 51 & 77 & 68 & 50 \\ 13 & \infty & 60 & 70 & 67 & 59 \\ 51 & 60 & \infty & 57 & 36 & 2 \\ 77 & 70 & 57 & \infty & 20 & 55 \\ 68 & 67 & 36 & 20 & \infty & 34 \\ 50 & 59 & 2 & 55 & 34 & \infty \end{pmatrix}\begin{matrix} B \\ T \\ P \\ M \\ N \\ L \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} B & T & P & M & N & L \end{matrix}$$

9. 设 D 是 5 个城市 v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 间的距离矩阵,求解推销员问题的最优解.

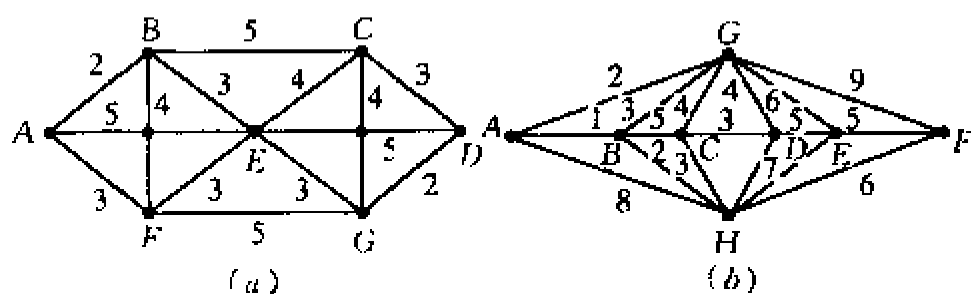
$$D=\begin{pmatrix} \infty & 34 & 2 & 50 & 59 \\ 34 & \infty & 36 & 68 & 67 \\ 2 & 36 & \infty & 51 & 60 \\ 50 & 68 & 51 & \infty & 13 \\ 59 & 67 & 60 & 13 & \infty \end{pmatrix}\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix}$$

10. 试证:题图 5.5 中存在一条哈密顿路,但不存在哈密顿回路.



题图 5.5

11. 分别求题图 5.6 中(a)与(b)的中国邮路问题的解.



题图 5.6

习题解答与提示

第一篇　组合数学初步

第一章　抽屉原理

1. 两次运用抽屉原则.

2. 对圆周 n 等分,再用抽屉原则.

3. 20 只盘子.

4. 参照§1.3 例 1.3.7.

5. 用三角形的三条中位线将三角形四等分.

6. 仿照 5 题,将三角形九等分.

7. $a_n=n^2+1(n=2,3,\cdots)$.

8. a_1,a_2,a_3 中至少有两个数奇偶性相同,不妨设为 a_1,a_2;于是知 b_1,b_2 中至少有一个与 a_1,a_2 奇偶性相同.

9. 记 $a_i=10m_i+i$, $i=0,1,\cdots,9$,其中 m_i 为整数,则每一整数必与 a_i 之一同余.

10. 用反证法.

11. 将正方体分为全等的 8 个小正方体.

12. 对三行两次用抽屉原理.

13. 仿照题 9.

第二章　排列与组合

1. $4\times3\times3=36$(种).

2. (1)9 条;(2)15 条;(3)18 条.

3. 略.

4. 略.

5. 略.

6.(1)2 286;(2)1 143.

7.120.

8.12 种.

9.(1)A_{m+1}^{n};

(2)A_{m}^{n};

(3)A_{m}^{n-1};

(4)略.

10.(1)60;(2)190－60＝130.

11.(1)5!＝120;

(2)4 个位置.

12. 3×5＝15(种).

13. 10^3＝1 000(种).

14. 10^7(种).

15. 3^6(种).

16.(1)4×4＝16;

(2)4×47＝168;

(3)169;

(4)51;

(5)396.

17. 48.

18. 840.

19. 5!×6!＝86 400.

20. 5 665;5 511.

21.略.

22.略.

23.略.

第三章 容斥原理

1. $10^6-10^3-10^2+10$.

2. $500-\left[\frac{500}{3}\right]-\left[\frac{500}{5}\right]-\left[\frac{500}{7}\right]+\left[\frac{500}{15}\right]+\left[\frac{500}{21}\right]+\left[\frac{500}{35}\right]-\left[\frac{500}{105}\right]=229$;

$\left[\frac{500}{3}\right]-\left[\frac{500}{15}\right]-\left[\frac{500}{21}\right]+\left[\frac{500}{105}\right]=114$;

$\left[\frac{500}{5}\right]-\left[\frac{500}{15}\right]-\left[\frac{500}{35}\right]+\left[\frac{500}{105}\right]=57$;

$\left[\frac{500}{7}\right]-\left[\frac{500}{21}\right]-\left[\frac{500}{35}\right]+\left[\frac{500}{105}\right]=38$.

3. $1\,000-\left[\frac{1\,000}{4}\right]-\left[\frac{1\,000}{5}\right]-\left[\frac{1\,000}{6}\right]+\left[\frac{1\,000}{20}\right]+\left[\frac{1\,000}{24}\right]+\left[\frac{1\,000}{30}\right]-\left[\frac{1\,000}{120}\right]=500$.

4. $1000-\left[\frac{1\,000}{3}\right]-\left[\frac{1\,000}{5}\right]-\left[\frac{1\,000}{7}\right]-\left[\frac{1\,000}{13}\right]+\left[\frac{1\,000}{15}\right]+\left[\frac{1\,000}{21}\right]+\left[\frac{1\,000}{39}\right]+\left[\frac{1\,000}{35}\right]+\left[\frac{1\,000}{65}\right]+\left[\frac{1\,000}{91}\right]-\left[\frac{1\,000}{105}\right]-\left[\frac{1\,000}{195}\right]-\left[\frac{1\,000}{273}\right]-\left[\frac{1\,000}{455}\right]+\left[\frac{1\,000}{1\,365}\right]=421$.

5. 2人.

6. *WTBZ*](1) $8!-(C_4^1.7!-C_4^2.6!-C_4^3.5!-C_4^4.4!)=$ $24\,024$;

(2) $8\cdot 7!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)=$ $8\cdot 1\,854=14\,832$;

(3) $=5\cdot 1\,854=9\,270$;

(4) $C_8^2\cdot 1=28$;

(5) $C_8^k\cdot k!\left(1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}-\cdots(-1)^k\frac{1}{k!}\right)$.

7. (1) $D_7=1\,854$;

(2) $7!-D_7=3\,186$;

(3) $7!-D_7-7\cdot D_6=1\,331$;

(4) $7!-1=5\,039$.

8. $D_{10}=1\,334\,961$.

9. 240.

10. $10\,000=2^3\cdot5^3$, $\varphi(1\,000)=1\,000(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=400$,

$100=2^2\cdot5^2$, $\varphi(100)=100(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=40$,

故所求整数个数为:$400-40=360$.

第四章　递归关系

1. (1) $u_1+u_3+\cdots+u_{2n-1}=u_{2n}-1$;

(2) $u_0+u_2+u_4+\cdots+u_{2n}=u_{2n+1}$;

(3) $n=2k$,

$u_0-u_1+u_2-\cdots+(-1)^n\cdot u_n=1+u_{n-1}$;

$n=2k+1$,

$u_0-u_1+u_2-\cdots+(-1)^n\cdot u_n=1-u_{n-1}$.

2. $a_n=2^{n-2}+(-1)^{n+1}\cdot2^{n-2}=2^{n-2}\cdot(1+(-1)^{n+1})$.

3. $f(n)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot3^n-\frac{1}{8}\cdot(-3)^n$.

4. $H(n)=\frac{3}{\sqrt{22}}[(4-\sqrt{22})^{n-1}-(4-\sqrt{22})^{n-1})]$.

5. $h(n)=\frac{8}{9}-\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}(-2)^n$.

6. $b_n=(\frac{8}{27}+\frac{7}{72}n-\frac{1}{24}n^2)2^n-\frac{8}{27}(-1)^n$.

7. (1) $h(n)=3^n$;

(2) $f(n)=2+\frac{5}{2}n-\frac{1}{2}n^2$;

(3) $h(n)=\frac{1}{2}[1+(-1)^n]$;

(4) $G(n)=2^{n+1}-1$.

8. $(m+1)(3+\frac{5}{6}m+\frac{2}{3}m^2)$.

9. $\frac{1}{2}(m+1)(m^3-m^2+m+2)$.

10. $p(x)=1-3x+x^3$; $\frac{1}{4}(m+1)(m^3+m^2-6m+4)$.

11. 参照例4.4.1、例4.4.2和例4.4.3.

12. 略.

第五章　母函数

1. $f(x)=\frac{1}{1-cx}$.

2. (1) $f(x)=\frac{1}{1+x}$;

(2) $f(x)=\frac{x^2}{(1-x)^3}$;

(3) $f(x)=\frac{5-4x}{(1-x)^2}$;

(4) $f(x)=e^x$;

(5) $f(x)=e^{-x}$.

3. (1) $f(x)=x+4x^3+16x^5+\cdots$,

$$a_n=2^{n-2}[1+(-1)^{n+1}];$$

(2) $f(x)=\frac{1+2x}{1-x-x^2}=$

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x},$$

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1};$$

(3) $f(x)=\frac{x}{1-x-9x^2-9x^3}=\frac{-\frac{1}{8}}{1-x}+\frac{\frac{1}{4}}{1-3x}+\frac{-\frac{1}{8}}{1+3x}$.

$$a_n = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cdot 3^n - \frac{1}{8}(-3)^n;$$

(4) $f(x) = \frac{8x-1}{1-8x+16x^2} = \frac{-2}{1-4x} + \frac{1}{(1-4x)^2}$,

$a_n = (n-1)4^n$;

(5) $f(x) = \frac{1-3x^2}{1-3x^2+2x^3} = \frac{\frac{14}{9}}{1-x} + \frac{-\frac{2}{3}}{(1-x)^2} + \frac{\frac{1}{9}}{1+2x}$,

$a_n = \frac{8}{9} - \frac{2}{3}n + \frac{1}{9}(-2)^n$;

(6) $f(x) = \frac{x-4x^2+3x^3}{1-5x+6x^2+4x^3-8x^4} =$

$$\frac{-\frac{8}{27}}{1+x} + \frac{\frac{17}{108}}{1-2x} + \frac{\frac{2}{9}}{(1-2x)^2} + \frac{-\frac{1}{12}}{(1-2x)^3},$$

$$a_n = \left(\frac{8}{27} + \frac{7}{72}n - \frac{1}{24}n^2\right)\cdot 2^n - \frac{8}{27}(-1)^n.$$

4. $f(x) = \frac{x(x^2+4x-1)}{(1-x)^4} =$

$$x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + \cdots + n^3x^n + \cdots.$$

5. 略.

6. 略.

7. 考虑数列 $0, 1!, 2!, \cdots, n!, \cdots$ 其指母函数为

$$x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = x(1 + x + \cdots + x^{n-1} + \cdots) = \frac{x}{1-x}.$$

8. $(1+x)^a$.

9. (1) $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{5^n})$;

(2) $(\frac{5}{4}n - \frac{3}{4})\frac{1}{2^n}$

(3) 略..

10. 指母函数为

$$\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)^2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^3 =$$

$\frac{1}{4}(e^{5x}+2e^{3x}+e^{x})$,

$a_n=\frac{1}{4}(5^n+2\cdot 3^n+1)$.

(3)略.

第二篇　图论

第一章　图的基本概念

1. 略.

2. 略.

3. 略.

4. 略.

5.6个.

6.9个.

7. 略.

8. 邻接矩阵:

$$(a)A=\begin{vmatrix}0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&1\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\\1&1&1&0&0&0\end{vmatrix},$$

$$(b)A=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&1\\0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1\\0&1&1&1&1&0\end{vmatrix},$$

关联矩阵:

$$(a)M=\begin{vmatrix}1&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&1\\1&0&0&1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1&0&0&1\end{vmatrix},$$

$$(b)M=\begin{vmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&1&1&1&1\end{vmatrix}.$$

9~20 略.

第二章　树

1. 略.

2. (1)1 个;

   (2)9 个;

   (3)$\sum_{i=2}^{k}(i-2)n_i+2$.

3~9. 略.

10. B_1,B_2,B_4 为前缀码.

11~15. 略.

第三章　平面图

1. (a)、(b)、(c)、(f)为平面图.

2. 均非最大可平面图.

3~10. 略.

11.(甲、乙、丙)→(a,b,c)或(a,c,b)或(b,a,c).

12.$a\to b\to d\to f\to g\to e\to c\to a$.

13.略.

第四章 匹配理论、色数问题

1~3.略.

4. $\beta(G)=6$.

5. 略.

6. $(a,f),(b,e),(c,d),(e,c),(f,d)$.

7.$(a)\chi(G)=3$;$(b)\chi(G)=4$.

8.略.

9.a_1,a_5,a_6一组;a_2,a_3,a_4另一组.

10.张教物理,王教计算机,李教数学,赵教电工.

第五章 路径问题

1.略.

2. $v_1v_3v_6v_5v_4v_7v_9v_8v_{10}v_2v_1$.

3.略.

4.略.

5. $uv_1v_2v_3v_5v_4v_6v$.

6. $(a)v_6v_5v_4v_3v_7v_1v_2$;

$(b)v_3v_1v_2v_7v_{10}$;$v_9v_5v_6v_4v_8v_7$.

7.填加边 $v_1v_2v_5v_6v_7v_9$.

8.最优解为:$B\to T\to L\to P\to N\to M\to B$,且最小费用为207.

9.$v_1\to v_2\to v_3\to v_4\to v_5\to v_1$,最小费用为193.

10.略.

11.略.